UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional De Matemática

TESIS

TEOREMA DE ENGEL EN LAS ÁLGEBRAS DE LIE

Presentada por:

Br. Jonathan Josué Zapata Campos

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Línea de Investigación:

Álgebra

Piura, Perú

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Facultad de Ciencia

Escuela Profesional de Matemática

TEOREMA DE ENGEL EN LAS ÁLGEBRAS DE LIE

Línea de Investigación:

ÁLGEBRA

Br. Jonathan Josué Zapata Campos

Ejecutor

Dr. Julio Enrique López Castillo

Asesor

DECLARACIÓN JURADA DE ORIGINALIDAD DE LA TESIS

Yo: JONATHAN JOSUÉ ZAPATA CAMPOS, identificado con CU/DNI Nº46875462, Bachiller de ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA, de la Facultad de CIENCIAS y domiciliado en calle /Jirón/Av. Marcavelica Mz I Lote 8, Urb. La alborada del Distrito: Piura, Provincia: Piura, Departamento: Piura, Celular: 952659735 Email:josuezapata771@gmail.com.

DECLARO BAJO JURAMENTO: que la tesis que presento es original e inédita, no siendo copia parcial ni total de una tesis desarrollada, y/o realizada en el Perú o en el Extranjero, en caso contrario de resultar falsa la información que proporciono, me sujeto a los alcances de lo establecido en el Art. Nº 411, del código Penal concordante con el Art. 32º de la Ley Nº 27444, y Ley del Procedimiento Administrativo General y las Normas Legales de Protección a los Derechos de Autor. En fe de lo cual firmo la presente.

Piura………………. del 20…

DNI: 46875462

Artículo 411.- El que, en un procedimiento administrativo, hace una falsa declaración en relación con hechos o circunstancias que le corresponde probar, violando la presunción de veracidad establecida por ley, será reprimido con pena privativa de libertad no menor de uno ni mayor de cuatro años.

Art. 4. Inciso 4.12 del Reglamento del Registro Nacional de Trabajos de Investigación para optar grados académicos y títulos profesionales –RENATI Resolución de Consejo Directivo Nº 033-2016-SUNEDU/CD

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

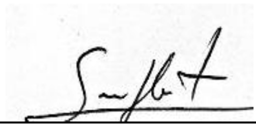
Facultad de Ciencia

Escuela Profesional de Matemática

TEOREMA DE ENGEL EN LAS ÁLGEBRAS DE LIE

Línea de Investigación:

ÁLGEBRA

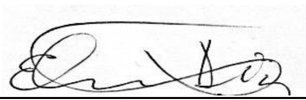


Dra. Sonia Alicia Casós Fernández

Presidente

MSc. Graciela Pilar Burgos Namuche

Secretaria



Dr. Elmer Porfirio Díaz Contreras

Vocal

ACTA DE SUSTENTACIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS

"AÑO DEL DIALOGO Y LA RECONCILIACIÓN NACIONAL"

ACTA DE SUSTENTACIÓN 072-2018-D-FC-UNP

FACULTAD DE CIENCIAS

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para evaluar la Tesis denominada **"TEOREMA DE ENGEL EN LAS ÁLGEBRAS DE LIE"** presentada por el señor Bachiller **ZAPATA CAMPOS,** con el asesoramiento del **Dr. Julio E. López Castillo;** oídas las observaciones y respuestas a las preguntas formuladas, y de conformidad al Reglamento de Tesis para obtener el Título Profesional en la Facultad de Ciencias, lo declaran:

APROBADO (X) **DESAPROBADO** ( )

Con la mención de:

........Sobresaliente........

(X) En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo de Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA.**

(X) En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo Universitario de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**; después que el sustentante incorpore la sugerencia del Jurado Calificador.

Piura, 14 de diciembre 2018.

UNP

Dra SONIA ALICIA CASÓS FERNÁNDEZ
PRESIDENTE DE JURADO DE TESIS

MSc. GRACIELA DEL PILAR BURGOS NAMUCHE
SECRETARIO DE JURADO DE TESIS

Dr. ELMER PORFIRIO DÍAZ CONTRERAS
VOCAL DE JURADO DE TESIS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
DECANATO
Facultad de Ciencias

Campus Universitario - Urb.Miraflores S/N. Castilla
PIURA – PERU

Dedico esta tesis al ser supremos Dios, que me ha dado el conocimiento, a mis padres y hermanos por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Doy un reconocimiento especial de gratitud a mi asesor Dr. Julio Enrique López Castillo, por su paciencia incondicional y su esfuerzo para que este trabajo se haga realidad, juntamente con los profesores que me enseñaron compartiendo sus conocimientos para conmigo.

1. Quiero reconocer a mis compañeros de la universidad, Manuel Saavedra, Manuel Ortiz, Alonso Fiestas, Vladimir Navarro, que fueron de ayuda en la formación académica.
2. Quiero reconocer a Iglesia el Buen Pastos de Piura, gracias por sus oraciones
3. Quiero reconocer a la academia Santa Rosa de Lima, que me brindó su apoyo en el proceso de admisión a la universidad.
4. Quiero agradecer a Cindy por su ánimo amoroso incondicional.
5. Quiero agradecer a mis amigos Guillermo, Bryan, Henry y Key por su amistad.
6. Quiero agradecer a la Familia Villalobos Cuevas, por su amistad y su apoyo cuando estuve en Lima.
7. Agradecer a la Iglesia Bautista de Cieneguilla Vida Nueva de Lima por su amistad.
8. Agradecer a la Iglesia Bautista de Musa por su apoyo y amistad.
9. A mis alumnos de secundaria del colegio New Life Christian School.

INDICE

Resumen

Es importante destacar que el propósito de este trabajo es el estudio del teorema de Engel, un teorema muy importante en las álgebras de Lie, según Quiñones, Gutiérrez, y Mora (2008), afirmaron: que el teorema de Engel conecta la nilpotencia de un algebra de Lie con la nilpotencia ordinaria de operadores en un espacio de operadores.

Por tanto en la investigación, se halla una base en la cual todas las transformaciones de un subálgebra de Lie están representadas por matrices triangulares superiores para lo cual, primero se determina la existencia de una base compuesta por transformaciones lineales y segundo, todas las transformaciones lineales del subálgebra de Lie se pueden representar por matrices estrictamente superior, esto de logra a partir de la recolección de información escrita de libros, tesis desarrolladas, con el fin de llegar a lo previsto.

Palabras claves: Álgebras de Lie, Subálgebra de Lie, solubles y nilpotencia.

Abstrac

It is important to emphasize that the purpose of this work is the study of Engel's theorem, a very important theorem in Lie algebras, according to Quiñones, Gutiérrez, and Mora (2008), they affirmed: that Engel's theorem connects the nilpotencia of a Lie algebra with the ordinary nilpower of operators in an operator space.

Therefore in the investigation, a base is found in which all the transformations of a subalgebra of Lie are represented by superior triangular matrices for which, first the existence of a base composed by linear transformations is determined and second, all the linear transformations of Lie subalgebra can be represented by strictly superior matrices, this is achieved from the collection of written information from books, developed theses, in order to arrive at what was planned.

Keywords: Lie algebras, Lie subalgebra, soluble and nilpotencia.

INTRODUCCIÓN

El álgebra de Lie, fue introducido por el matemático estudiante en la universidad Cristiania de nacionalidad noruego llamado Sophus Lie, (en la actualidad universidad llamada Oslo), antes de viajar a Berlín en 1869 en donde se relacionó con Felix Klein, ya actualmente famoso, viajaron juntos a París para poder entrar en contacto con los recientes desarrollos en teoría de grupos efectuados por Camille Jordan. Inspirado por la obra de ambos, en 1874 introdujo varios conceptos básicos en el campo de las transformaciones geométricas que lo llamó grupos finitos y grupos continuos, y que después asoció lo que actualmente se conoce como álgebra de Lie.

En la diferentes ramas de las matemáticas, entre las cuales destacan, el análisis matemático, ecuaciones diferenciales, topología y el álgebra Lineal, pero ante todo, este último juega un papel muy importante, siendo la base del álgebra de Lie, y posteriormente es utilizado en este trabajo de investigación.

En el primer capítulo se exhibe la problemática de la investigación, comenzando con una pregunta de abstracción, justificando y dando la importancia de esta. Se dan los objetivos generales y específicos, que es de suma importancia, pues es un orientador hacia donde se dirige la investigación.

En el segundo capítulo se plantea algunas definiciones preliminares de espacio vectorial, subespacio vectorial, dimensión, transformaciones lineales y concepto de álgebras de Lie, puesto que proporcionan la base sólida de la investigación en desarrollo. Cabe resaltar que un álgebra de Lie es un espacio vectorial L sobre un campo, dotado de una operación bilineal $[\ ;\ ]$ denominada corchetes de Lie, que satisface las propiedades de anti-simetría e identidad de Jaccobi. Las subálgebra, Ideales y homomorfismos de un álgebra de Lie, desempeñan un rol importante, pues este último preserva las operaciones entre dos espacios vectoriales sin escatimar el rol que tiene la dimensión de un espacio. De manera análoga se define las álgebras de Lie Solubles y las álgebras de Lie Nilpotentes, eje central de este trabajo de investigación, igualmente se plantea la hipótesis general y especifica.

En el tercer capítulo, se propone el marco metodológico que tiene como bases: el enfoque y diseño de la investigación, incluso este trabajo de investigación tiene una línea centrado en las ciencias formales lo cual se caracteriza por valerse de la lógica matemática. Del mismo modo se describe los métodos, procedimientos, técnicas e instrumentos de la investigación, pues nos brinda un mecanismo para el estudio del presente trabajo.

El cuarto capítulo, se analiza los resultados y discusión que conlleva este trabajo. El teorema de Engel en álgebras de Lie cuyos elementos son ad-nilpotente es uno de los resultados clásicos en la teoría de álgebra de Lie. También en Álgebra Lineal se plantea algo similar manifestando que para cada transformación o matriz nilpotente, existe una base en la cual la transformación lineal tiene una matriz (estrictamente) triangular superior. De la misma manera en el contexto de las Álgebras de Lie el problema es más complejo: dada una subálgebra L de Lie compuesta por transformaciones lineales $\boldsymbol{x}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, una pregunta de abstracción que se plante es, ¿existe una base de $\mathcal{V}$ en las cuales todas las transformaciones de L están representadas por matrices triangulares superiores? Esta pregunta es contestaba en este capítulo.

I. ASPECTOS DE LA PROBLEMATICA

1.1. Descripción de la realidad problemática.

Gutiérrez, Mora y Poveda (2008) describen que “el teorema de Engel en las álgebras de Lie cuyos elementos son ad-nilpotentes es uno de los resultados clásicos en la teoría de álgebras de Lie”.

En el Álgebra Lineal, se sabe que para cada transformación lineal nilpotente existe una base en la cual la transformación tiene una matriz (estrictamente) triangular superior. Ahora bien ocurre algo similar en el contexto de las Álgebras de Lie, pues el problema se vuelve complejo, es decir si dada una subálgebra $\mathcal{L}$ de Lie compuesta por transformaciones lineales, $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, surge una pregunta de abstracción, planteada de la siguiente manera: ¿Existe una base en la cual todas las transformaciones están representadas por matrices triangulares estrictamente superior en el teorema de Engel?

1.2. Justificación e importancia de la investigación.

El álgebra Lineal es una rama de la matemática, que estudia la combinación de elementos de estructuras abstractas acorde a ciertas reglas. Debido a esto, existen diferentes estudios relacionados con el álgebra. Uno de ellos es el álgebra de Lie, rama de las matemáticas se estudia 3 tipos de Álgebra de Lie; solubles, nilpotentes y semisimples.

Todas las álgebras nilpotentes son solubles mientras que las semisimples carecen de ideales solubles que no sean ceros, es decir no tiene nada de solubles, por lo consiguiente surge el teorema de Engel; este teorema tiene una gran importancia en el Álgebra de Lie, pues proporciona una condición para que un Álgebra de Lie compuesta por operadores nilpotente compartan un autovector común asociado al valor propio cero, es decir que podamos encontrar una base, en el cual si tomamos un operador o una transformación lineal, este obtenga una matriz, con la condición que sea estrictamente superior.

El teorema de Engel proporciona una idea para probar un teorema llamado el Teorema de Lie, pues este relaciona la existencia de una base con cada elemento representado por una matriz triangular, estudiados para un algebra soluble. La aportación del teorema de Engel al teorema de Lie ayuda a generalizar campos algebraicos.

Gonzales (2002), es su tesis de maestría afirma: "La esencia del teorema de Engel para álgebras de Lie nilpotentes es la existencia de un vector común para un álgebra de Lie consistente de endomorfismos nilpotentes. El teorema de Lie es de naturaleza similar, pero requiere de cerradura algebraica, para que F contenga todos los valores propios requeridos".

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

- Analizar el teorema de Engel en las algebras de Lie.

1.3.2. Objetivos específicos

- Determinar la existencia de la base de una subálgebra de Lie compuesta por transformaciones lineales.
- Determinar bajo qué condiciones todas las trasformaciones lineales del subálgebra de Lie se pueden representar por matrices triangulares estrictamente superior.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación.

Es importante resaltar las aportaciones, dadas sobre los autores acerca del Teorema de Engel, y como explican su utilidad en las algebras de Lie.

Gutiérrez, Mora y Poveda (2008), concluyen lo siguiente: "El Teorema de Engel proporciona una condición suficiente para que todas las transformaciones lineales de un Álgebra de Lie compartan un mismo vector propio asociado al vector propio cero. El concepto de ad-nilpotencia juega un papel importante en la demostración".

Erdmann y Wildon (2006) da un aporte, y anuncia la condición para que un álgebra de Lie sea nilpotente y lo que ocurre con las álgebra de Lie de dimensión 1: "Es muy tentador suponer que un subálgebra de Lie L de $gl(\mathbb{V})$ es nilpotente si y solo si hay una base de $\mathbb{V}$ tal que los elementos de L estén representados por matrices triangulares estrictamente superiores. Sin embargo, la palabra "solo si" es falsa. Por ejemplo, cualquier algebra de Lie de dimensión 1 (trivialmente) es nilpotente" (p.49).

Jacobson (1961), da una idea clara sobre el teorema de Engel y anuncia lo siguiente: "En teorema de Engel es un caso en las álgebras de Lie de las trasformaciones lineales, y la conclusión que se puede establecer es que existe una base bajo el espacio vectorial, de manera que todas las matrices son nulamente triangulares. Estos resultados se pueden aplicar a través de la representación adjunta a un algebra de Lie de dimensión finita" (p.36).

Samelson (2012), aporta lo siguiente: "La discusión más detallada de las algebras de Lie con un teorema que, aunque es bastante espacial, es técnicamente importante; se conoce como el teorema de Engel. Conecta la nilpotencia de un álgebra de Lie con la nilpotencia ordinaria de operadores en un espacio vectorial" (p. 19).

Humphreys (1980), afirma: "Si L es nilpotente, entonces todos los elementos de L son ad-nilpotentes, es agradable encontrar también que los contrario es cierto" (p. 12).

2.2. Bases teóricas.

Es importante resaltar los conceptos preliminares para el desarrollo de este trabajo de investigación, las definiciones, lemas, teoremas, corolario y ejemplos, expuesto a continuación, son resultados a fin de enfocarnos en el análisis del Teorema de Engel en las álgebras de Lie.

2.2.1. ESPACIOS VECTORIALES.

Primeramente, el concepto de espacio vectorial y propiedades es de suma importancia, ya que se plantea el uso de este ente abstracto en este trabajo de investigación; visto de esta manera la teoría de conjuntos y propiedades de relación (unión, intersección, inclusión, no inclusión, pertenencia y no pertenencia) toman parte también, en definitiva son materias estudiadas en la preparación del estudiante de pregrado.

En las matemáticas las operaciones como la suma y resta; son utilizadas con frecuencias. La idea de espacio vectorial con alguna dimensión finita es incluir tales operaciones bajo un campo, y esta noción de espacio vectorial, tema central en nuestro estudio de este capítulo.

Definición 2.2.1.1. Un conjunto $\mathbb{V}$, no vacio, se llama espacio vectorial, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, si está provisto de dos operaciones: suma (+) y producto (.), definidos de la siguiente manera: (Lázaro, 2005, p. 93)

$$+ \ : \ \mathbb{V} \times \mathbb{V} \ \rightarrow \ \mathbb{V}$$

$$(u, v) \rightarrow u + v$$

Con respecto a la operación suma cumplen los siguientes:

A1) $u + v = v + u; \ \forall \ u, v \in \mathbb{V}$.

A2) $(u + v) + w = u + (v + w); \forall \ u, v, w \in \mathbb{V}$.

A3) $\exists!\, 0 \in \mathbb{V}; v + 0 = 0 + v; \ \forall\, v \in \mathbb{V}$.

A4) $\forall\, v \in \mathbb{V}, \exists! - v; v + (-v) = 0$

$$\cdot \ : \ \mathbb{K} \times \mathbb{V} \ \rightarrow \ \mathbb{V}$$

$$(\alpha, v) \to \alpha . v$$

Con respecto a la operación producto cumple los siguientes:

P1) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, v \in \mathbb{V}$.

P2) $1.v = v, \qquad \forall\, v \in \mathbb{V},\ 1 \in \mathbb{K}$.

También cumple con la propiedad distributiva:

D1) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \forall\, v \in \mathbb{V}$.

D2) $\alpha(u + v), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}; \forall\, u\,, v \in \mathbb{V}$.

Los elementos de $\mathbb{V}$ se llaman vectores y los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman escalares. Como $\mathbb{V}$ está definido sobre $\mathbb{K}$, decimos que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial. Lages (1998), propones 4 ejemplos que están propuestos a continuación:

Ejemplo 2.2.1.1. El siguiente conjunto es un espacio vectorial, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, queda definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)/x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 2.2.1.2. Para todo número natural n, el símbolo $\mathbb{R}^n$ representa al espacio vectorial euclidiano $n - dimensional$. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son las secuencias $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ de números reales.

Ejemplo 2.2.1.3. Dados dos enteros m, n positivos. Sea $\mathbb{V}$ el conjunto de matrices $m \times n$. Se denota a este espacio como $M(m \times n)$, como conjunto de todas las matrices, que tiene m-filas y n-columnas, este conjunto es un espacio vectorial. Las propiedades A2, P2 satisfacen por las reglas de la adición de matrices y multiplicación de matrices por números, para que cumplan las propiedades A3, A4, P2 la matriz nula, y la matriz identidad es respectivamente:

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad \vec{1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Ejemplo 2.2.1.4. Sea $\mathbb{V}$ el conjunto de todas las funciones definidos por todos los números. Si f, g son dos funciones, se define la suma $f + g$. Esta es la función donde se evalúa $(f + g)(t)$ en el número t. También se da la multiplicar f por un número escalar c donde se evalúa $cf(t)$ el número t. Luego se decir que es un espacio vectorial.

Definición 2.2.1.2. El vector cero es, el aquel vector cuyas coordenadas son todas iguales a cero: $0 = (0, 0, \dots, 0)$. El inverso aditivo de $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, es $-u = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ (Lages, 1998, p. 2).

Observaciones:

1. Sea $\mathbb{R}^n$, si $n = 1$, se tiene $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, esto es la recta numérica.
2. Sea $\mathbb{R}^n$, si $n = 2$, se tiene $\mathbb{R}^2$, esto es el plano cartesiano.
3. Sea $\mathbb{R}^n$, si $n = 3$, se tiene $\mathbb{R}^3$, esto es el espacio euclidiano tridimensional.

2.2.2. SUBESPACIOS.

En esta sección se define subespacio vectorial, esta idea surge al encontrar un espacio vectorial que está incluido en un espacio vectorial más grande, así se puede decir que un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ es un subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{V}$ que cumplen las mismas operaciones de $\mathbb{V}$. Se propone algunos ejemplos y resultados en esta sección.

Definición 2.2.2.1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ es un subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{V}$, con las siguientes propiedades (Lages, 1998, p.10):

1. $0 \in \mathbb{F}$.
2. Si $u, v \in \mathbb{F}$, entonces $u + v \in \mathbb{F}$.
3. Si $v \in \mathbb{F}$, entonces $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha\, v \in \mathbb{F}$.

Proposición 2.2.2.1. Un subconjunto $\mathbb{W} \neq \phi$ de $\mathbb{V}$ es un subespacio si, y solo si $(\alpha u + \beta v) \in \mathbb{W}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in \mathbb{W}$ (Lázaro, 2005, p. 97).

Demostración:

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in \mathbb{W}$, se tiene que $\alpha u \in \mathbb{W}$ y $\beta v \in \mathbb{W}$, por propiedad 3, luego por propiedad 2 se tiene que $(\alpha u + \beta v) \in \mathbb{W}$. Tomando $\alpha = \beta = 0$ se tiene que

$(0u + 0v) = 0 \in \mathbb{W}$, luego $\alpha = \beta = 1$ se tiene que $(1u + 1v) = (u + v) \in \mathbb{W}$, luego se toma $\beta = 0$ así se tiene $(\alpha u + 0v) = \alpha u + 0 = \alpha u \in \mathbb{W}$.

□

Más generalmente, dados $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{F}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ se tiene que:

$$\alpha_1 v_1 +, \dots, +\alpha_m v_m \in \mathbb{F}.$$

La proposición anterior, es un resultado que proporciona una condición necesaria y suficiente, para que un subconjunto de un espacio vectorial sea subespacio. A continuación Lages (1998), plantea 5 ejemplos de subespacio vectorial:

Ejemplo 2.2.2.1. El conjunto $\{0\}$ y todo el espacio $\mathbb{V}$, son ejemplos triviales de subespacios de $\mathbb{V}$. Todo subespacio vectorial es, en sí mismo, un espacio vectorial.

Ejemplo 2.2.2.2. Sea $v \in \mathbb{V}$ un vector no nulo. El conjunto $\mathbb{F} = \{\alpha v / \alpha \in \mathbb{R}\}$ de todos los múltiplos de v es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$, llamado la recta que pasa por el origen y contiene a v.

Ejemplo 2.2.2.3. Sea $\mathbb{V} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial vectorial de las funciones reales de una variable real $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathrm{C}^k(\mathbb{R})$ de las funciones k veces continuamente derivables es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.

Según Lages (1998), afirma: "que también son los subespacios de $\mathbb{V}$ el conjunto $\mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ de las funciones continuas, el conjunto $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones infinitamente derivables, el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ el conjunto de todos los polinomios $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ y el conjunto $\mathcal{P}_n$ de todos los polinomios de grado $\leq n$". Cuales quiera $n, k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\mathrm{C}^{\mathbf{0}}(\mathbb{R}) \supset \mathrm{C}^{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}) \supset \mathrm{C}^{\boldsymbol{k+1}}(\mathbb{R}) \supset \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \supset \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) \supset \boldsymbol{\mathcal{P}_n}$$

Se observa que el conjunto de los polinomios de grado n no es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ pues la suma de dos polinomios de grado n puede tener grado $< n$ (Lages, 1998, p. 11).

Ejemplo 2.2.2.4. Sean $a_1, \dots, a_n$ números reales. Se tiene el siguiente conjunto definido $H = \{v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.2.2.5. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial y L un conjunto de índices. Si, para cada $\lambda \in L$, $\mathbb{F}_\lambda$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{E}$, entonces la intersección $\bigcap_{\lambda \in L} \mathbb{F}_\lambda$ es un subespacio vectorial.

Se toma un tiempo para demostrar este ejemplo. En efecto, para probar que $\bigcap_{\lambda \in L} \mathbb{F}_\lambda$ sea un subespacio vectorial, debe verificar las 3 propiedades de subespacio:
i) Como $0 \in \mathbb{F}_\lambda\ \forall\, \lambda \in L$, luego $0 \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathbb{F}_\lambda$.
ii) Sea $u, v \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathbb{F}_\lambda$ se tiene que $u \in \mathbb{F}_\lambda$ y $v \in \mathbb{F}_\lambda\ \forall\, \lambda \in L$, entonces $u + v \in \mathbb{F}_\lambda\ \forall\, \lambda \in L$, así pues $u + v \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathbb{F}_\lambda$.
iii) Sea $v \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathbb{F}_\lambda$, entonces $v \in \mathbb{F}_\lambda\ \forall\, \lambda \in L$, sea $\alpha \in \mathbb{K}$, luego $\alpha v \in \mathbb{F}_\lambda\ \forall\, \lambda \in L$, así pues tenemos $\alpha v \in \bigcap_{\lambda \in L} \mathbb{F}_\lambda$.

Definición 2.2.2.2. Sea $v_1, \dots, v_m$ un conjunto de vectores pertenecientes al espacio vectorial $\mathbb{E}$. Se dice que el vector $v \in \mathbb{E}$, es combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_m$, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ únicos, tales que (Lages, 1998, p.12):

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

Definición 2.2.2.3. Sea X un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{E}$. El subespacio vectorial de $\mathbb{E}$ generado por X es, por definición, el conjunto de todas las combinaciones lineales
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$, de vectores $v_1, \dots, v_m \in X$, esto es (Lages, 1998, p.12):

$$S(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \,/ \alpha_i \in \mathbb{K}, v_i \in X \right\}$$

Se ve fácilmente que el conjunto de todas las combinaciones lineales que es posible formar con los vectores del conjunto X es un subespacio vectorial, denotado con el símbolo $S(X)$.

Observaciones:

1. El subespacio $S(X)$, generado por el conjunto $X \subset \mathbb{E}$, contiene al conjunto X, y además es el menor subespacio de $\mathbb{E}$ que contiene a X. En otras palabras, si $\mathbb{F}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{E}$ y $X \subset \mathbb{F}$ entonces $S(X) \subset \mathbb{F}$.
2. Si X es ya un espacio vectorial, entonces $S(X) = X$.
3. Si $X \subset \mathbb{E}$ un subconjunto. El subespacio de $\mathbb{E}$ generado por X es la intersección de todos los subespacios de $\mathbb{E}$ que contienen a X.

Definición 2.2.2.4. Sea $X \subset \mathbb{E}$ un espacio vectorial. Cuando el subespacio $S(X)$ coincide con $\mathbb{E}$, se dice que X es el conjunto de generadores de $\mathbb{E}$ (Lages, 1998, p.12).

Definición 2.2.2.5. Si X es un conjunto de generadores del espacio vectorial $\mathbb{E}$, si todo vector $w \in \mathbb{E}$ puede expresarse como combinación lineal.

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

De vectores $v_1, \dots, v_m$ pertenecientes a X (Lages, 1998, p.12).

A continuación Lages (1998), plantea 3 ejemplos de cómo se define la combinación lineal y los conjuntos generadores.

Ejemplo 2.2.2.6. Sea $\mathbb{E} = \mathbb{K}[x]$ es un espacio vectorial de las funciones polinómicas de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ y se $X = \{f_n(x) = x^n; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, $\mathbb{E}$ es un subespacio generado por X.

Ejemplo 2.2.2.7. Los llamados vectores canónicos

$$e_1 = (1,0,0, \dots ,0)$$
$$e_2 = (0,1, \dots ,0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0,0,0, \dots ,1)$$

Constituyen un conjunto de generadores del espacio $\mathbb{R}^n$. En efecto, dado $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Ejemplo 2.2.2.8. Los monomios $1, x, \dots, x^n, \dots$(en números infinitos) forman un conjunto de generadores del espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios reales. Asimismo, los $n + 1$ primeros de ellos, a saber, $1, x, \dots, x^n$ constituyen un conjunto de generadores de $\mathcal{P}_n$, espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$.

Teorema 2.2.2.1. Sea X un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbb{E}$, entonces $S(X)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{E}$ (Lázaro, 2005, p. 107).

Demostración:

i) $0 \in S(X)$, puesto que $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_m$.

ii) Sea u y w vectores $S(X)$. Se debe de probar que $u + w$ es un elemento de $S(X)$.

En efecto:

Si $u \in S(X)$, entonces existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

Luego

Si $w \in S(X)$, entonces existe $\beta_i \in \mathbb{K}$ tal que:

$$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_m v_m$$

Luego se tiene:

$$u + w = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_m + \beta_m)v_m$$

Esta igualdad implica que $u + w \in S(X)$.

iii) Sea k un escalar y $u \in S(X)$. Se debe probar que $ku \in S(X)$.

En Efecto:

Si $u \in S(X)$, entonces existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$, luego $ku = (k\alpha_1)v_1 + (k\alpha_2)v_2 + \cdots + (k\alpha_m)v_m$, esta igualdad implica que $ku \in S(X)$.

□

Teorema 2.2.2.2. Sea $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$, $m + 1$ vectores pertenecientes a un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Si $v_1, \ldots, v_m$, generan a $\mathbb{V}$, entonces $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ también genera a $\mathbb{V}$ (Lázaro, 2005, p. 108).

Demostración:

Se debe demostrar que $u \in \mathbb{V} \Longrightarrow \exists\, \alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 +, \ldots, + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1}$$

Sea $w \in \mathbb{V} \Longrightarrow \exists\, \alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 +, \ldots, + \alpha_m v_m$, como $v_{m+1} \in \mathbb{V}$, entonces $\exists\, \beta_i \in \mathbb{K}$ tal que se expresa:

$$v_{m+1} = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 +, \ldots, + \beta_m v_m$$

$$0 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 +, \ldots, + \beta_m v_m - v_{m+1}$$

Luego:

$$w = w + 0 = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 +, \ldots, + (\alpha_m + \beta_m)v_m - v_{m+1}.$$

□

2.2.3. SUMA DIRECTA DE DOS ESPACIOS VECTORIALES

En esta sección se define la suma directa de dos espacios vectoriales, y se plantea una pregunta de abstracción en la cual se expone: ¿Se puede sumas espacios vectoriales? Su importancia es definitiva en este trabajo, pues ayuda a generar nuevos subespacios vectoriales de un espacio vectorial, se propone algunos resultados más adelante.

Definición 2.2.3.1. Sea $F_1 \ y \ F_2$ subespacio vectoriales de $\mathbb{E}$. El subespacio vectorial de $\mathbb{E}$ generado por la reunión $F_1 \cup F_2$ es, como se ve fácilmente, el conjunto de todas las sumas $v_1 + v_2$, donde $v_1 \in F_1$ y $v_2 \in F_2$. Se le denota (Lázaro, 2005, p.118):

$$F_1 + F_2 = \{v_1 + v_2;\ v_1 \in F_1, v_2 \in F_2\}$$

Observación: Mas general, dados los subconjunto $X, Y \subset \mathbb{E}$, se denota con $X + Y$ al conjunto cuyo elementos son la suma $u + v$, tales que $u \in X$ y $v \in Y$. Cuando $X = \{u\}$ se reduce a un único elemento u, se escribe $u + Y$ en vez de $\{u\} + Y$. Se dice que $u + Y$ resulta de Y por la translación de u.

Definición 2.2.3.2. Sea $F_1, F_2 \subset \mathbb{E}$, cuando los subespacio tienen en común sólo el elemento 0, se escribe $F_1 \oplus F_2$ en vez de $F_1 + F_2$ y se dice que $F = F_1 \oplus F_2$ es la suma directa de F_1, F_2 (Lages, 1998, p.15).

2.2.4. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y se le asocia un subconjunto finito que genera a dicho espacio vectorial, y a cada vector de ese subconjunto no se pueda expresar en combinación lineal de los otros, entonces se origina la idea de dimensión, donde se debe recordar que el objeto de estudio es el espacio vectorial, pues tiene una estructura algebraica simple. Lages (1998), dice: “Una vez fijada una base en un espacio vectorial de dimensión n, los vectores de la base, con coeficientes unívocamente determinados”.

Definición 2.2.4.1 Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial. Se dice que un conjunto $X \subset \mathbb{E}$ es linealmente independiente si ningún vector $v \in X$ es combinación lineal de otros vectores de X (Lages, 1998, p.27).

Observación:

1. Para abreviar la simbología, se usa L.I. en vez de linealmente independiente.
2. Si X tiene un único elemento $v \neq 0$, se dice que X es L.I. por definición.
3. Cuando X es L.I. se dice también que los elementos de X, son vectores linealmente independientes.
4. Cuando el conjunto X es L.I., sus elementos son todos $\neq 0$, pues el vector nulo es combinación lineal de otros cualesquiera: $0 = 0v_1 + \cdots + 0v_m$. (Si no hay "otros", $X = \{v\}, v \neq 0$).

Un criterio muy útil para verificar la independencia lineal de un conjunto, es dado por el teorema siguiente:

Teorema 2.2.4.1. Sea X un conjunto L.I. en el espacio vectorial $\mathbb{E}$. Si $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$ con $v_1, \ldots, v_m \in X$ sí y solo si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ (Lages, 1998, p.27).

Demostración:

⇒]

Por reducción al absurdo se tiene $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$ con $v_1, \ldots, v_m \in X$ tales que no todos los α_i son nulos. Por simplicidad, sea $\alpha_1 \neq 0$. Entonces tenemos:

$$v_1 = -(\alpha_2/\alpha_1)v_2 - \cdots - (\alpha_m/\alpha_1)v_m$$

Los que expresa que v_1 como combinación lineal de los elementos de X, lo cual es una contradicción.

⇐]

El reciproco, se demuestra de la misma manera por el absurdo, Si X no fuese L.I., algunos de sus vectores sería combinación lineal de los demás:

$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$. Luego se tiene $1.v - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_m v_m = 0$

Que es una combinación lineal nula de vectores en X, en la cual por lo menos el primer coeficiente es diferente de cero.

□

Corolario 2.2.4.1. Si $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$ y los vectores $v_1, \dots, v_m \in X$ son L.I., entonces $\alpha_1 = \beta_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_m$ (Lages, 1998, p.28).

Demostración:

En efecto se tiene en este caso:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$$

$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$

Restando se tiene:

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_m - \beta_m)v_m$$

Por el Teorema 2.2.4.1 se tiene que:

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m$$

□

Lages (1998), proporciona un ejemplo de un subconjunto L.I., a continuación que aclara la idea de independencia lineal:

Ejemplo 2.2.4.1. Los vectores canónicos $e_1 = (1,0, \dots ,0)$,…, $e_n = (0,0, \dots ,1)$ en $\mathbb{R}^n$ son L.I. En efecto, $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$ significa $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$, luego $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Análogamente, los monomios $1, x, \dots, x^n$ en $\boldsymbol{\mathcal{P}_n}$ son L.I. pues $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = p(x)$ es el vector nulo en $\mathcal{P}_n$ solo si $p(x)$ es la función idénticamente nula, esto es, $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto implica $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$; pues un polinomio no nulo de grado k tiene como máximo k raíces reales. Esta observación nos permite inferir que $X = \{1, x, \dots, x^n, \dots\} \subset \boldsymbol{\mathcal{P}}$ es un conjunto infinito L.I.

Teorema 2.2.4.2. Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores no nulos del espacio vectorial $\mathbb{E}$. Si ninguno de ellos es combinación lineal de los anteriores, entonces el conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ es L.I (Lages, 1998, p.28).

Demostración:

Por reducción al absurdo, se toma una combinación lineal de los vectores dados, con coeficientes no todos nulos, sea igual a cero. Se toma $v_r \in X, r \leq m$ y sea la combinación lineal:

$0 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$, con $\alpha_r \neq 0$. De esto se obtendría lo siguiente:

$$v_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} v_{r-1}$$

Luego v_r sería combinación lineal de los elementos anteriores a él en la lista $v_1, \dots, v_m$.

□

Observación:

Evidentemente, se cumple un resultado análogo con "posteriores" en vez de "anteriores".

Definición 2.2.4.2. Un conjunto $X \subset \mathbb{E}$ se dice linealmente dependiente, si no es L.I (Lages, 1998, p.29).

Observación:

1. Se utiliza L.D., es vez de Linealmente dependiente para evitar las complicaciones.
2. Esto significa que alguno de los vectores $v \in X$ es combinación lineal de los otros elementos de X.
3. Si $X = \{0\}$, por definición es L.D.
4. Para que X sea L.D., es necesario y suficiente que exista una combinación lineal nula $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$ de vectores $v_1, \dots, v_m \in X$, con algún coeficiente $\alpha_i \neq 0$.
5. Si $X \subset Y$ y X es L.D. entonces Y también es L.D. Si $0 \in X$, entonces el conjunto X es L.D.

Con la idea de aclarar Lages (1998), platea la idea de dependencia lineal, en los siguientes 2 ejemplos a continuación:

Ejemplo 2.2.4.2. Los vectores $u = (1,2,3)$, $v = (4,5,6)$, $w = (7,8,9)$ en $\mathbb{R}^3$, son L.D. pues $w = 2v - u$.

Ejemplo 2.2.4.3. Cuando los vectores $v_1, \dots, v_m$ son L.D., ello no significa que cualquiera de ellos sea combinación lineal de los demás. Por ejemplo si $u = (1,2)$, $v = (3,4)$ y $w = (4,8)$, entonces, $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^2$es un conjunto L.D. pues $w = 4u + 0v$, pero v no es combinación lineal de u y w.

Definición 2.2.4.3. Una base de un espacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subset \mathbb{E}$ linealmente independiente que genera $\mathbb{E}$ (Lages, 1998, p.29).

Esto significa que todo vector $v \in \mathbb{E}$ se expresa, de modo único, como combinación lineal $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ de elementos $v_1, \dots, v_m$ de la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Si $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de $\mathbb{E}$ y $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ entonces se dice que los números $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son las coordenadas del vector v en la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ (Lages, 1998, p. 29).

Ejemplo 2.2.4.4. Los vectores $e_1 = (1,0, \dots ,0)$,…, $e_n = (0,0, \dots ,1)$ constituye una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, llamada base canónica. Análogamente, los polinomios $1, x, \dots, x^n$, forman una base para el espacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{P}_n}$ de los polinomios de grado $\leq n$ (Lages, 1998, p. 33).

Ejemplo 2.2.4.5. El conjunto $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ de los monomios de grado arbitrarios constituye una base (infinita) para el espacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ de todos los polinomios reales. Conviene observar, mientras tanto, que el conjunto $X = \{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}, \dots\} \subset \mathbb{R}^\infty$, donde $\overline{e_n} = (0, \dots ,0,1,0, \dots)$ es la sucesión cuyo enésimo término es 1 y los demás son iguales a cero, es un conjunto infinito L.I., pero no es una base de $\mathbb{R}^\infty$, porque no lo genera (Lages, 1998, p. 35).

Se da un aporte a continuación: Si un espacio vectorial $\mathbb{E}$ admite una base con n elementos entonces todas las bases de $\mathbb{E}$ tienen el mismo número n de elementos. Al número n se le llama dimensión de $\mathbb{E}$.

El siguiente lema es de suma importancia para demostrar los siguientes teoremas a continuación, pues se basa en una condición importante para que se obtenga una solución no trivial, cuando se posee un sistema lineal homogéneo, y eso ocurrirá cuando el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

Lema 2.2.4.1. Todo sistema lineal homogéneo cuyo número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones admite una solución no trivial (Lages, 1998, p.31).

Demostración:

Se considera el siguiente sistema

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \qquad (*)$$

De m ecuaciones con n incógnitas, donde $m < n$. Se usa la inducción sobre el número m de ecuaciones. Es decir, para $m = 1$, se tiene una única ecuación.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

Con $n > 1$ incógnitas. Uno de los coeficientes $a_{1i} \neq 0$. Cambiando, si fuere necesario, los nombres de las incógnitas, supóngase que $a_{1n} \neq 0$. La ecuación equivale a:

$$x_n = -\left(\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{1n}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n-1}}{a_{1n-1}}x_{n-1}\right)$$

Dando valores arbitrarios no nulos a las $n-1$ incógnitas $x_1, \dots, x_{n-1}$ y calculando x_n por medio de esta última expresión, se obtiene una solución no trivial $(x_1, \dots, x_n)$ para la ecuación dada. Para completar la inducción, se lleva a la suposición de que el lema es verdadero para un sistema de $m-1$ ecuaciones. Al cambiar, si fuera necesario, el orden de las ecuaciones y los nombres de las incógnitas, se admite que en el sistema $(*)$ dado, se tiene $a_{mn} \neq 0$. Entonces, de la m-ésima ecuación resulta

$$x_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 + \cdots + \frac{a_{mn-1}}{a_{mn}}x_{n-1}\right)$$

Se sustituye, en cada una de las $m-1$ primeras ecuaciones, la incógnita x_n por este valor, se tiene un sistema homogéneo de $m-1$ ecuaciones con las $n-1$ incógnitas $x_1, \dots, x_{n-1}$. Por la hipótesis inductiva, este sistema admite una solución no trivial $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, pues $n-1 > m-1$. Se propone a continuación la ecuación:

$$\alpha_n = -\left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}\alpha_1 + \cdots + \frac{a_{mn-1}}{a_{mn}}\alpha_{n-1}\right)$$

Se obtiene una solución no trivial $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ del sistema propuesto $(*)$.

□

Teorema 2.2.4.3. Si los vectores $v_1, \dots, v_m$ generan el espacio vectorial $\mathbb{E}$, entonces cualquier conjunto con más de m vectores en $\mathbb{E}$ es L.D (Lages, 1998, p.32).

Demostración

Dados los vectores $w_1, \dots, w_n$ en $\mathbb{E}$, con $n > m$, para cada $j = 1, .., n$ se tiene

$$w_j = \alpha_{1j}v_1 + \cdots + \alpha_{mj}v_m$$

Como $v_1, \dots, v_m$ generan $\mathbb{E}$. Para probar que los vectores w_j son L.D., se debe encontrar coeficientes $x_1, \dots, x_n$, no todos iguales a cero, tales que

$$x_1w_1 + \cdots + x_nw_n = 0$$

Sustituyendo los w_j por sus expresiones en términos de los v_i, esta igualdad significa que:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_{1j}\right)v_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_{2j}\right)v_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_{mj}\right)v_m = 0$$

Ciertamente, esta última condición satisface cuando todas las sumas dentro de los paréntesis sean nulas, o sea, cuando $(x_1, \dots, x_n)$ sea una solución no trivial del sistema homogéneo

$$\begin{gathered}\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0\\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0\end{gathered}$$

Tal solución existe, por el Lema 2.2.4.1., pues $n > m$. Luego los vectores $w_1, \dots, w_n$ son L.D.

□

Corolario 2.2.4.2. Si los vectores $v_1, \ldots, v_m$ generan el espacio vectorial $\mathbb{E}$ y los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son L.I. entonces $n \leq m$ (Lages, 1998, p. 33).

Demostración

Por reducción al absurdo se demuestra este corolario, supóngase que $n > m$, por el Teorema 2.2.4.3., se tiene que el conjunto de vectores $u_1, \ldots, u_n$ es L.D. por lo cual se obtiene una contradicción.

□

Corolario 2.2.4.3. Si el espacio vectorial $\mathbb{E}$ admite una base $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ con n elementos, cualquier otra base de $\mathbb{E}$ posee también n elementos (Lages, 1998, p.33).

Demostración

Para demostrar, este corolario se tiene que llegar a la conclusión que $n = m$, es decir, basta probar que $n \leq m$ y $n \geq m$. En efecto sea $\boldsymbol{\mathcal{B}'} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ otra base de $\mathbb{E}$. Como $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ genera a $\mathbb{E}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es L.I., se tiene por el Corolario 2.2.4.2., que $n \leq m$. Por otra parte, como $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ genera a $\mathbb{E}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ es L.I., por el mismo Corolario 4.1.3.2., se concluye que $m \leq n$.

□

Se recuerda que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ tiene dimensión finita si admite una base $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ con un número finito n de elementos.

Observaciones:

1. Este número, que es el mismo en todas las bases de $\mathbb{E}$, se llama la dimensión del espacio vectorial.
2. Si $\mathbb{E} = \{0\}$, la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{E}$ es cero.

El siguiente corolario afirma que si la dimensión de un espacio vectorial concuerda con un conjunto que generan dicho espacio, entonces dichos vectores deben ser L.I., y viceversa.

Corolario 2.2.4.4. Si la dimensión de $\mathbb{E}$ es n, un conjunto de n vectores genera $\mathbb{E}$ si, y sólo si, es L.I (Lages, 1998, p.33).

Demostración

⇒]

Sea $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ genera ha $\mathbb{E}$ y que X no es L.I., es decir que sea L.D., entonces existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$, no todo de ellos nulos tal que:

$v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$, (por simplicidad), se tiene que $n-1$ vectores general a $\mathbb{E}$, pero por hipótesis n vectores generan a $\mathbb{E}$, y por el Teorema 2.2.4.3 sería una contradicción.

⇐]

Sea $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ L.I. y sea $v \in \mathbb{E}$ tal que $v \notin X$, luego por el Teorema 2.2.4.3., el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ es L.D., entonces existen $\alpha_i \in \mathbb{K}$ no todos nulos tal que:

$$0 = \alpha_1 v_1 +, \ldots, + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v$$

Luego:

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} v_1 -, \ldots, -\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} v_n$$

De los cual se tiene que X genera a $\mathbb{E}$.

□

Teorema 2.2.4.4. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial de dimensión finita n. Entonces (Lages, 1998, p.34):

a) Todo conjunto $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de generadores de $\mathbb{E}$ contiene una base.
b) Todo conjunto L.I. $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset \mathbb{E}$ está contenida en una base.
c) Todo subespacio vectorial $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ tiene dimensión finita, que es $\leq n$.
d) Si la dimensión del subespacio $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ es n entonces $\mathbb{F} = \mathbb{E}$.

Demostración

a) Se debe demostrar que existe $\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_l}\} \subset \{u_1, \ldots, u_n\}$ tal que:

   I) $\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_l}\}$ es L.I.

II) $\{u_j, u_{i_1}, \dots, u_{i_l}\}$ sea L.D, $\forall\, j \in \{1, \dots, n\}$.

Sea $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $u_{i_1} \neq 0$. Entonces $\{u_{i_1}\}$ es L.I. Si satisface II. El proceso termina. Si no satisface II. Entonces existe $i_2 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\{u_{i_1}, u_2\}$ es L.I. Como este proceso es finito, como máximo se tiene n etapas, obteniendo $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_l}\} \subset \{u_1, \dots, u_n\}$ que satisfaga I y II.

Se prueba ahora que $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_l}\}$ es una base de $\mathbb{E}$.

Como $\{u_j, u_{i_1}, \dots, u_{i_l}\}$ es L.D, existen escalares $\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_n^{(j)}$ tales que:

$u_j = \lambda_1^{(j)} u_{i_1} + \cdots + \lambda_n^{(j)} u_{i_l}$, para todo $j = 1, \dots, n$

Sea $v \in \mathbb{E}$ como $\{u_1, \dots, u_n\}$ genera al espacio $\mathbb{E}$, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tales que:

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Luego,

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=1}^{l} \lambda_k^{(j)} u_{i_k} = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \lambda_k^{(j)} \right) u_{i_k}$$

Esto afirma que v es una combinación lineal de los vectores $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_l}\}$, luego $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_l}\}$ es una base de $\mathbb{E}$.

b) Se debe probar que existe un conjunto de vectores $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_{m+k}\}$ tal que:

I) Es L.I.

II) $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_{m+k}, w\}$ no es L.I., $\forall w \in \mathbb{E}$.

Si el conjunto L.I. $\{w_1, \dots, w_m\}$ no satisface II., entonces existe $w_{m+1} \in \mathbb{E}$. Tal que $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}\}$ es L.I.

Si $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}\}$ no satisface II., entonces existe $w_{m+2} \in \mathbb{E}$ tal que $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, w_{m+2}\}$ es L.I., este proceso es finito, con máximo hasta $n - m$ etapas, pues todo subconjunto L.I. de $\mathbb{E}$ tienen máximo $n = dim\mathbb{E}$ elementos.

Como $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_{m+k}\}$ satisface I y II, tenemos que este conjunto es L.I. y $\{v, w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_{m+k}\}$ no es L.I., $\forall v \in \mathbb{E}$, luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+k}$ tal que:

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m + \lambda_{m+1} w_{m+1} + \cdots + \lambda_{m+k} w_{m+k}$$

Luego $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_{m+k}\}$ es una base de $\mathbb{E}$ que contiene al conjunto L.I. $\{w_1, \dots, w_m\}$.

c) Supóngase que $\mathbb{F} \neq \{0\}$.
Se debe probar que existen vectores $v_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, \dots, k$ tal que:
I) $\{v_1, \dots, v_k\}$ es L.I.
II) $\{v, v_1, \dots, v_k\}$ no es L.I., $\forall v \in \mathbb{F}$.
Como $\mathbb{F} \neq \emptyset$, entonces existe $v_1 \neq 0$ en $\mathbb{F}$.
Entonces el conjunto $\{v_1\}$ es L.I. Si $\{v_1\}$ no satisface II., existe $v_2 \in \mathbb{F}$ tal que $\{v_1, v_2\}$ es L.I., como todo conjunto L.I., de $\mathbb{E}$ tiene como máximo $n = dim\mathbb{E}$ elementos, el proceso para en algún $k \leq n$. Se debe probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base de $\mathbb{F}$.
Como $\{v, v_1, \dots, v_k\}$ no es L.I., $\forall v \in \mathbb{F}$, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$tal que:
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$
Luego $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base de $\mathbb{F}$ con $dim\mathbb{F} = k \leq n$.

d) Si la dimensión $dim\mathbb{F} = dim\mathbb{E} = n$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{F}$, como es un conjunto de generadores y L.I., por el Corolario 2.2.4.4. genera a $\mathbb{E}$, por lo tanto es una base también, luego $\mathbb{F} = \mathbb{E}$.

□

Uno de los resultados que se trata en este trabajo de investigación es la dimensión de un espacio vectorial, preferentemente con espacios vectoriales de dimensión finita. Un espacio vectorial $\mathbb{E}$ tiene dimensión infinita si no tiene dimensión finita, esto es, cuando ningún subconjunto finito de $\mathbb{E}$ es una base. Como todo subconjunto finito diferente del vector 0 contiene un subconjunto L.I., que genera el mismo subespacio, se dice que el espacio vectorial $\mathbb{E}$ tiene dimensión infinita si, y sólo si, no es generado por un conjunto finito de vectores. Lages (1998), proporciona 3 ejemplos para concretizar la idea, a continuación:

Ejemplo 2.2.4.6. Los polinomios $1, x, \dots, x^n$ constituyen una base del espacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{P}_n}$, de los polinomios de grado $\leq n$, luego $\boldsymbol{\mathcal{P}_n}$ tiene dimensión finita y $dim\boldsymbol{\mathcal{P}_n} = n + 1$. Por otro lado, el conjunto infinito $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ es una base del espacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ de todos los polinomios, el cual tiene dimensión infinita.

Ejemplo 2.2.4.7. El espacio vectorial $\mathbb{R}^{(\infty)}$, pues admite la base infinita $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}, \dots\}$, donde $\overline{e_n} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ es la sucesión infinita cuyo n-ésimo término es 1 y los demás son ceros.

Ejemplo 2.2.4.8. El espacio vectorial $M(m \times n)$, de las matrices $m \times n$, tiene dimensión finita, igual a $m \cdot n$. Una base para $M(m \times n)$ es formada por matrices $\boldsymbol{e}_{ij}$, cuyo ij-ésimo elemento (en la intersección de la i-ésima fila con la j-ésima columna) es igual a 1 y los demás elementos son iguales a cero.

Teorema 2.2.4.5. Sea $\{v_1, .., v_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio generado vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ no es una base de $\mathbb{V}$ entonces existen otros vectores $v_{k+1}, \dots, v_n$, tal que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ (Antón, 1986, p. 184).

Demostración:

Por ser $\mathbb{V}$ un espacio vectorial generado de dimensión finita, se tiene una base $\{b_1, \dots, b_n\}$, por el Teorema 2.2.4.4., se sabe que el cardinal de cualquier conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{V}$ no puede exceder al cardinal de generadores de $\mathbb{V}$. Sea $\mathbb{V} = Span\{b_1, \dots, b_n\}$ se debe tener que $k \leq n$.

Caso I: Si $k = n$

Cada $\{v_1, \dots, v_n, b_i\}$ debe ser un conjunto linealmente dependiente por el Teorema 2.2.4.3., entonces cada b_i se puede expresar en combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$, entonces de hecho $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, y como genera al espacio $\mathbb{V}$, es una base.

Caso II: Si $k = n - 1$

Entonces algunos $b_i \notin Span\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de lo contrario todos los b_i estarían en $Span\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ y entonces $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ sería un conjunto linealmente independiente de $n - 1$ vectores que generan al espacio vectorial $\mathbb{V} = Span\{b_1, \dots, b_n\}$ de dimensión n que es algo imposible. Pero entonces $\{v_1, \dots, v_n, b_i\}$ un conjunto linealmente generando a $\mathbb{V}$ y por lo tanto sería una base de $\mathbb{V}$.

Caso III: Si $n < k + 1$

La hipótesis de la inducción del teorema se mantiene cada vez que la diferencia entre la dimensión $\dim\mathbb{V}$ y el número de vectores $\{v_1, \dots, v_k\}$ es menor que $n-k$. Como el $Span\{v_1, \dots, v_k\} \neq \mathbb{V}$, tiene que haber algún vector de la base $b_i \notin Span\{v_1, \dots, v_k\}$. Entonces como $\{v_1, \dots, v_k, b_i\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores $k+1$, puede extenderse a una base para $\mathbb{V}$, luego:

$$n-(k+1) = n-k-1 < n-k$$

Se puede así completar el conjunto $\{v_1, \dots, v_k, b_i\}$ a una base $\{v_1, \dots, v_k, b_i, b_{i+k+1}, \dots, b_n\}$ de $\mathbb{V}$. Esto $\{v_1, \dots, v_k\}$ entonces completa a la base de $\mathbb{V}$.

$\square$

2.2.5. ESPACIO COCIENTE

Esta sección describe la importancia de un espacio cociente, el concepto de Espacio Cociente es una idea muy teórica, ya que surge cuando se le proporciona una relación de equivalencia. A continuación se define el espacio cociente, un subespacio dotado de ricas propiedades y brinda ayuda en esta investigación.

Definición 2.2.5.1. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ – espacio vectorial y $\mathbb{V}'$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Se dice que dos vectores u y v pertenecientes a $\mathbb{V}$ son equivalentes modulo $\mathbb{V}'$, si $(u-v)$ pertenece a $\mathbb{V}$ (Lázaro, 2005, p.101).

Definición 2.2.5.2. Sea v un vector fijo del espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $\mathbb{V}'$ un subespacio de $\mathbb{V}$. El conjunto $\bar{v} = \{u \in \mathbb{V}; u \sim v\}$ es la clase de equivalencia de v (Lázaro, 2005, p.101).

$$\bar{v} = \{u \in \mathbb{V}; u \sim v\} = \{u \in \mathbb{V}; (u-v) \in \mathbb{V}'\} = v + \mathbb{V}' = \{v + v'; v' \in \mathbb{V}'\}$$

Observación:

1. La relación $\sim$ es de equivalencia.
2. La relación $\sim$ para que sea de equivalencia debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.
3. $u \sim v \bmod \mathbb{V}' \Leftrightarrow (u-v) \in \mathbb{V}';\ u, v \in \mathbb{V}$

Definición 2.2.5.3. Dado el espacio vectorial $\mathbb{V}$ el subespacio vectorial $\mathbb{V}' \subset \mathbb{V}$, definimos el espacio cociente $\mathbb{V}/\mathbb{V}'$ es el conjunto de las clases de equivalencia (Lázaro, 2005, p.102).

Esto es:

$$\mathbb{V}/\mathbb{V}' = \{\bar{v}/v \in \mathbb{V}\}$$

En resumen, el conjunto de las clases laterales de $\mathbb{V}'$ en $\mathbb{V}$ es denotado por:

$$\mathbb{V}/\mathbb{V}' = \{v + \mathbb{V}'/v \in \mathbb{V}\}$$

Es llamado el espacio cociente de $\mathbb{V}$ modulo $\mathbb{V}'$. El conjunto $\mathbb{V}/\mathbb{V}'$ es un subespacio vectorial bien definido dotado de las operaciones de un subespacio.

2.2.6. TRANSFORMACIONES LINEALES.

En el curso de Calculo I, se estudia a las funciones, la regla de correspondencia, dominio, rango, la relación entre el domino y rango. Esta idea familiar aclara los que consiste una transformación lineal. En el Álgebra Lineal las trasformaciones, que realmente se consideran funciones entre dos espacios vectoriales, preservando siempre dos operaciones, la suma y la multiplicación por un escalar, nos proporciona una multiplicidad de propiedades, que estudiaremos y utilizaremos en esta sección.

Definición 2.2.6.1. Sea $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espacios vectoriales. Una transformación lineal $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ es una correspondencia que a cada vector $v \in \mathbb{E}$ le asigna un vector $A(v) = A \cdot v = Av \in \mathbb{F}$ tal que, para cualesquiera $u, v \in \mathbb{E}$ **y** $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplan las relaciones (Lages, 1998, p.43):

1) $A(u + v) = Au + Av$
2) $A(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot Au$

Observación:

1) Si $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ es una Transformación Lineal, entonces $A \cdot 0 = 0$.
3) Además, si $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ es una Transformación Lineal, entonces dados $u, v \in \mathbb{E}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que $A(\alpha u + \beta v) = A(\alpha u) + A(\beta v) = \alpha \cdot Au + \beta \cdot Av$

Se dice que el vector $A \cdot v$ es la imagen (o el transformado) de v por la transformación lineal A. Lages (1998), plantea 3 ejemplos que ayuda en aclarar la idea de transformación lineal.

Ejemplo 2.2.6.1. Sea $\mathrm{a} = [\mathrm{a_{ij}}]$ una matriz $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{K}^{n\times 1} &\longrightarrow \mathbb{K}^{m\times 1} \\ X &\longmapsto \mathbf{a}\mathrm{X} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} T: \mathbb{K}^{n} &\longrightarrow \mathbb{K}^{m} \\ X &\longmapsto \mathbf{a}\mathrm{X} = (\mathbf{a}^t X^t)^t \end{aligned}$$

Son transformaciones lineales.

Ejemplo 2.2.6.2. Sea $\mathbb{V} = \mathcal{C}([\mathrm{a},\mathrm{b}];\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas de $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ en$\mathbb{R}$. Entonces, la transformación $\mathrm{T}: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ definida por:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ f &\longmapsto T(f) = T_f \end{aligned} \quad \text{Donde} \quad \begin{aligned} T_f[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T_f = \int_a^x f(s)ds \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.6.3. Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces la transformación derivación $\mathrm{T}: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$, definida por $\mathrm{f} \longmapsto \mathrm{Df}$:

$$(Df) = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1}$$

Donde $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$, es lineal.

Definición 2.2.6.2. Sea $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ dos espacios vectoriales, $\mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{F})$ es el conjunto de las transformaciones lineales de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$ (Lages, 1998, p.44).

El conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{F})$ define un espacio vectorial. Si $\mathbb{E} = \mathbb{F}$, se usa la notación $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ en vez de $\mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{E})$ a continuación.

Definición 2.2.6.3. Se llama operador lineal $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$, a la transformación lineal que va del espacio vectorial $\mathbb{E}$ en sí mismo (Lages, 1998, p.44).

Lages (1998), da una conclusión sobre una trasformación lineal $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$: "Es un tipo particular de función que tiene como dominio al espacio vectorial $\mathbb{E}$ y como contradomino al espacio $\mathbb{F}$. Lo que hace muy manejables las transformaciones lineales es que, para conocer $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{F})$, basta conocer los valores $A \cdot v$ que A asume en los valores $v \in \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{E}$".

El siguiente teorema habla sobre la existencia de una única transformación entre dos espacios vectoriales.

Teorema 2.2.6.1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sea $\mathbb{W}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea

$\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_\mathrm{n}$ vectores en $\mathbb{W}$. Entonces existe una única transformación lineal $L: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$, tal que $L(v_i) = w_i$, para todo $i = 1, \dots, n$ (Lages, 1998, p.45).

Demostración:

Se debe demostrar la unicidad y la existencia de dicha transformación.

Unicidad:

Sea $L: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ y $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ transformaciones lineales tales que $L(v_i) = T(v_i) = w_i$, para todo $\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$.

Sea $\mathrm{v} \in \mathbb{V}$ un vector arbitrario. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$, existen escalares únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

$$L(v) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = T(v)$$

$$L = T$$

Existencia:

Sea $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in \mathbb{V}$ un vector arbitrario. Definamos la transformación $L: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ por

$$L(v) = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n$$

Afirmación: L es Lineal.

En efecto sea $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ y $w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$ vectores de $\mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha v + \beta w = (\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n \in \mathbb{V}$ y

$$L(\alpha v + \beta w) = (\alpha x_1 + \beta y_1) w_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n) w_n$$

$$= \alpha x_1 w_1 + \beta y_1 w_1 + \cdots + \alpha x_n w_n + \beta y_n w_n$$

$$= \alpha (x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) + \cdots + \beta (y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n)$$

$$= \alpha L(v) + \beta L(w)$$

Lo cual, L es lineal. Asimismo, $L(v_i) = w_i$ por la propia definición de L.

□

2.2.7. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN.

En esta sección se da el concepto de Núcleo e Imagen de una transformación Lineal y su relación que tiene con la dimensión de un espacio vectorial, esto se resume en un teorema.

Toda transformación lineal A: $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ están asociados dos subespacio vectoriales indispensables para estudiar el comportamiento de A: el núcleo de A, que es un subespacio de $\mathbb{E}$; y la imagen de A, que es un subespacio de $\mathbb{F}$ (Lages, 1998, p.65).

Definición 2.2.7.1. La imagen de A es el subconjunto $Im(A) \subset \mathbb{F}$, formado por todos los vectores $w = Av \in \mathbb{F}$ que son imágenes de elementos de $\mathbb{E}$ por la transformación A (Lages, 1998, p.65).

La noción de imagen tiene sentido para toda función $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, lineal o no. Si A es lineal, entonces $Im(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}$ como se ve fácilmente.

Observación:

1) Si $Im(A) = \mathbb{F}$, se dice que la transformación A es sobreyectiva.
2) Sea $X \subset \mathbb{E}$ un conjunto de generadores del espacio vectorial $\mathbb{E}$. La imagen de la transformación lineal $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, es el espacio vectorial de $\mathbb{F}$ generado por los vectores Av, $v \in X$.
3) Se define la imagen de la siguiente manera:

$$Im(A) = \{w \in \mathbb{F} / \exists\ v \in \mathbb{E}; A(v) = w\}$$

Definición 2.2.7.2. El núcleo de la transformación lineal A: $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, es el conjunto de los vectores $v \in \mathbb{E}$ tales que $Av = 0$. Se usa la notación $\mathcal{N}(A)$, para representar el núcleo de A (Lages, 1998, p.65).

Observación:

1) Algunos autores definen al núcleo de una transformación A, como $Ker(A)$.
2) Se define el núcleo de la siguiente manera:

$$\mathcal{N}(A) = \{v \in \mathbb{E} / Av = 0\}$$

La notación para definir una transformación, en adelante será variada, y se utiliza letras mayúsculas. Lázaro (2005), concluye que la imagen y el núcleo son subespacios, y lo plantea en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7.1. Sea $L: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal entre dos espacio vectorial (Lages, 1998, p.68).

1) $Im(L)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.
2) $\mathcal{N}(L)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Demostración:

1) Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $w_1, w_2 \in Im(L) \subset \mathbb{W}$, entonces existen $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tal que $L(v_1) = w_1$ y $L(v_2) = w_2$ luego.
$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) = \alpha w_1 + \beta w_2$$
Luego $\alpha w_1 + \beta w_2 \in \mathbb{W}$, luego por la Proposición 4.1.6.1, se tiene que $Im(L)$ es un subespacio.
2) Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v_1, v_2 \in \mathcal{N}(L) \subset \mathbb{V}$, entonces $L(v_1) = L(v_2) = 0$ luego.
$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) = 0$$
Luego $\alpha v_1 + \beta v_2 \in \mathcal{N}(L)$, es un subespacio de $\mathbb{V}$ por la Proposición 2.2.2.1.

□

Teorema 2.2.7.1. Una transformación lineal $\mathrm{T}: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es inyectiva si, y sólo si, su núcleo $\mathcal{N}(\mathrm{T})$ tiene como único elemento al vector nulo (Lages, 1998, p.68).

Demostración:

⇒]

Para demostrar que $\mathcal{N}(T)$ tiene como único elemento al vector nulo, se toma un vector arbitrario, $v \in \mathcal{N}(T)$ entonces $T(v) = 0 = T(0)$, como T es inyectiva, se tiene que $v = 0$.

⇐]

Supóngase que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, si $T(v) = T(w)$, entonces se tiene que $T(v - w) = T(v) - T(w) = 0$, luego $v - w \in \mathcal{N}(L)$ entonces $v - w = 0$, luego $v = w$.

□

Teorema 2.2.7.2. Una transformación lineal es inyectiva si, y sólo si, lleva vectores L.I. en vectores L.I (Lages, 1998, p.68).

Demostración

⇒]

Por hipótesis se tiene que $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es inyectiva y se $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ vectores L.I., se debe probar $T(v_1), \dots, T(v_n)$ son L.I.

En efecto dada la siguiente combinación lineal con $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para cada$i: 1, \dots, n$:

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$$
$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$$

Luego como T es inyectiva se tiene:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Como $v_1, \dots, v_n$ es L.I., se tiene $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, por lo tanto $T(v_1), \dots, T(v_n)$ es L.I.

⇐]

Por Hipótesis se tiene que $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ lleva vectores L.I, en vectores L.I., se debe probar que T es inyectiva.

En efecto, se elige un vector arbitrario sea $v \in T$ como T es LI. Entonces se tiene que $T(v)$ es L.I., y demás $T(v) \neq 0$, lo cual $v \notin \mathcal{N}(T)$ luego decimos que $\mathcal{N}(T)$ solo tiene el elemento nulo, es decir $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, y por el Teorema 2.2.7.1., se tiene que T es inyectiva.

□

Teorema 2.2.7.3. (Teorema del Núcleo y de la Imagen) Sean $L: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal, si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $L(\mathbb{V})$ es de dimensión finita y $dim(\mathbb{V}) = Im\,\mathcal{N}(L) + dim\,Im(L)$ (Delgado y Frensel, 2005, p. 64).

Demostración:

Se considera los siguientes casos:

Caso I: $\mathcal{N}(L) = \{0\}$.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$. Se prueba que $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ es una base de $L(\mathbb{V})$.

1) $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ es L.I.

En efecto, sea $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \dots, n$ se tiene:

$$\lambda_1 L(v_1) + \cdots + \lambda_n L(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow L(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 =, \dots, = \lambda_n = 0$$

2) $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ genera a $L(\mathbb{V})$.

En Efecto se $v \in L(\mathbb{V})$ y $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathbb{V}$ tal que $L(u) = v$. Entonces:

$$v = L(u) = L(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 L(v_1) + \cdots + \lambda_n L(v_n)$$

Caso II: $\mathcal{N}(L) \neq \{0\}$

- Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y sea $w \in L(\mathbb{V})$.

Entonces existe $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathbb{V}$ tal que $L(v) = w$, es decir $w = \lambda_1 L(v_1) + \cdots + \lambda_n L(v_n)$. Luego $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ genera a espacio $L(\mathbb{V})$ que tiene dimensión finita.

- Sea $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base de $\mathcal{N}(L)$ y $\{w_1 = L(v_1), \dots, w_m = L(v_m)\}$ base de $L(\mathbb{V})$.

Afirmación: $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m\}$ es una base de $\mathbb{V}$.

En efecto, se prueba que $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_m\}$ es LI., y generador de $\mathbb{V}$

1) Se ve primero que $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_m\}$ es L.I.

Sea $\lambda_1,\dots,\lambda_k,\mu_1,\dots,\mu_m \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = 0$$

Entonces:

$$L(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m) = 0$$

$$\lambda_1 L(u_1) + \dots + \lambda_k L(u_k) + \mu_1 L(v_1) + \dots + \mu_m L(v_m) = 0$$

$$\lambda_1 0 + \dots + \lambda_k 0 + \mu_1 L(v_1) + \dots + \mu_m L(v_m) = 0$$

$$\mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m = 0$$

$$\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$$

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + 0 v_1 + \dots + 0 v_m = 0$$

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

2) Se prueba que $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_m\}$ sea generador de $\mathbb{V}$

Sea $v \in \mathbb{V}$. Como $L(v) \in L(\mathbb{V})$, existe $\mu_1,\dots,\mu_m \in \mathbb{K}$ tal que

$$L(v) = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m$$

Luego

$$L\left(v - \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j\right) = L(v) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j L(v_j) = L(v) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j = 0$$

Es decir,

$$v - \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j \in \mathcal{N}(L)$$

Entonces existe $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{K}$, tal que

$$v-\sum_{j=1}^{m}\mu_j v_j=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i u_i$$

Esto es:

$$v=\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_k u_k+\mu_1 v_1\ldots+\mu_m v_m$$

Por lo tanto $\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_m\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y

$$dim\mathbb{V}=k+m=dim\mathcal{N}(L)+dim\,Im(L)$$

$\square$

Definición 2.2.7.3. Una transformación lineal $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}$ es biyectiva, entonces es llamada isomorfismo. Cuando un isomorfismo existe entre $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, decimos que $\mathbb{V}$ es isomorfo a $\mathbb{W}$ y se escribe $\mathbb{V}\approx\mathbb{W}$ (Lázaro, 2005, p.189).

Observación:

1) El isomorfismo es una relación de equivalencia en los conjuntos de espacio vectoriales.
2) Si $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}$ es un isomorfismo, entonces $T^{-1}:\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{V}$ es un isomorfismo. Es decir, si $\mathbb{V}$ es isomorfo a $\mathbb{W}$, entonces $\mathbb{W}$ es isomorfo a $\mathbb{V}$.

Definición 2.2.7.4. Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, se designa por $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ al conjunto cuyos elementos son todas las transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ (Lages, 1998, p. 44):

$\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})=\{L:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}/L\text{ es tranformación lineal}\}$

Observación:

1) El conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ es un espacio vectorial.
2) Si $dim\,\mathbb{V}=n$ y $dim\,\mathbb{W}=m$ entonces la dimensión de $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ se define

$$dim\,\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})=mn$$

Definición 2.2.7.5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un operador lineal sobre $\mathbb{V}$ es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ (Lages, 1998, p. 44).

2.2.8. MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

La matriz asociada a una transformación es un objeto concreto, en presencia de una base en su dominio y contradomino. Este concepto permite obtener una variedad ilimitada de ejemplos de transformaciones lineales, así como calcular específicamente la imagen de un vector, por una transformación. Para sintetizar en esta parte se ve el estudio de la relación entre una transformación lineal y su matriz, cómo se relaciona las matrices de una transformación, tomadas en base diferentes (Lages, 1998, p. 94).

Se define por el Teorema 2.2.6.1, una transformación lineal $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, seleccionaremos, para cada $j = 1, \dots, n$, un vector de la forma:

$$w_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\right) \in \mathbb{R}^m \text{ y } w_j = A\left(e_j\right)$$

Es el j-ésimo vector de la base canónica, $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, por la transformación lineal A. Ahora se determina la imagen de cualquier vector:

Sea $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

$$A(v) = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, A\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \dots, a_{mj}x_j\right)$$

$$A(v) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\,, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\,, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right)$$

Se tiene:

$$A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

Dónde:

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \quad (*)$$

En resumen una transformación lineal $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ queda completamente determinada por una matriz $\mathbf{a} = \left[a_{ij}\right] \in M(m \times n)$. Los vectores columna de dicha matriz son las imágenes $A(e_j)$ de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. La imagen $A(v)$ de un vector arbitrario $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^m$, cuyas coordenadas son dadas por las ecuaciones $(*)$ anteriores, en las que intervienen los vectores filas de la matriz **a.**

Se dice que **a** es la matriz de la transformación A relativa a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Se tiene con $j = 1, \dots, n$:

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

Donde los e_j están en $\mathbb{R}^n$ y los e_i en $\mathbb{R}^m$.

Definición 2.2.8.1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión *n* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\mathbb{W}$ un espacio vectorial de dimensión *m.* Sea $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de $\mathbb{W}$. Sea la transformación lineal y sea $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tal que (Lages, 1998, p. 95).

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \,, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

La matriz de L en relación a las bases ordenadas de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ es una matriz *mxn*:

$$[L]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}'\boldsymbol{\mathcal{B}}} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Un ejemplo que proporciona Lages (1998), que ayuda a encontrar una matriz en relación a la base canónica.

Ejemplo 2.2.8.1. Sea un operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

Determinaremos la matriz de T en relación de las bases canónicas
$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathbb{R}^3$

$$T(e_1) = T(1,0,0) = (3, -2, -1)$$

$$T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1,2)$$

$$T(e_3) = T(0,0,1) = (1,0,4)$$

Luego:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Es la matriz de la transformación lineal, asociada a las bases canónicas.

2.2.9. SUBESPACIO INVARIANTES

Si se toma una transformación lineal definida entre dos espacios vectoriales, dicha transformación puede ser representado mediante una matriz. Dicha matriz es denotada como la matriz de la transformación lineal asociada a una base. Para ellos se da algunos resultados, que es de suma importancia en este trabajo de investigación.

Definición 2.2.9.1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea un operador lineal sobre $\mathbb{V}$. Un auto valor de T es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe un vector $v \in \mathbb{V}$ no nulo talque $T(v) = \lambda v$ (Lages, 1998, p.169).

Observación:

1) Si λ es un autovalor de T, entonces todo vector $w \in \mathbb{V}$ tal que $T(w) = \lambda w$ es llamado autovector de T asociado al autovalor λ.
2) Una colección de todos los autovalores asociados a un autovalor λ de T es denominado el autoespacio de T asociado a λ.

El autoespacio de T asociada a un autovalor λ es de hecho es un subespacio de $\mathbb{V}$, pues:

$$\{v \in \mathbb{V}/T(v) = \lambda v\} = \{v \in \mathbb{V}/(T - \lambda I) = 0\} = Núcleo(T - \lambda I)$$

Asimismo, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T si, y solamente si, el subespacio $\{v \in \mathbb{V}/(T - \lambda I) = 0\}$ no es un subespacio nulo.

Definición 2.2.9.2. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita. Definimos el determinante de T como el determinante de $[T]_{\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{B}$ es una base ordenada de $\mathbb{V}$ (Delgado y Frensel, 2005, p. 138).

Lema 2.2.9.1. Sea L un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita. Entonces, L es invertible si, y solamente si, $det(L) \neq 0$ (Delgado y Frensel, 2005, p. 139).

Demostración:

Sea $\mathcal{B}$ una base ordenada del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Como L es invertible si, y solamente si, $[L]_{\mathcal{B}}$ es invertible, luego se tiene por hipótesis que L es invertible si, y solamente si, $det([L]_{\mathcal{B}}) \neq 0$, eso si $det(L) \neq 0$.

□

Teorema 2.2.9.3. Sea T un operador Lienal sobre un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita y sea λ un escalar. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes (Delgado y Frensel, 2005, p. 140).

a) λ es un autovalor de T.
b) $T - \lambda I$ no es invertible.
c) $det(T - \lambda I\ ) = 0$.

Demostración:

a)⟹b)

Para probar que $T - \lambda I$ no es invertible basta demostrar que $T - \lambda I$, no sea inyectiva, es decir que $\mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$. En efecto, como λ es un autovalor de T, entonces existe $0 \neq v \in \mathbb{V}$, talque:

$$(T - \lambda I)v = T(v) - \lambda I(v) = \lambda v - \lambda v = 0$$

Luego $v \in \mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, lo cual por el Teorema 2.2.7.1., se tiene que $T - \lambda I$ no es inyectiva.

b) ⟹c)

Como $T - \lambda I$ no es invertible, por el Lema 2.2.9.1., se tiene que $det(T - \lambda I\ ) = 0$.

c) $\Longrightarrow$*a)*

Como $det(T - \lambda I\ ) = 0$, entonces existe $v \neq 0$ tal que:

$$0 = (T - \lambda I)v = T(v) - \lambda I(v) = T(v) - \lambda v$$

Luego $T(v) = \lambda v$, de lo cual λ es un autovalor de T.

$\square$

Definición 2.2.9.3. Sea el polinomio $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$, donde el grado n es λ, cuyo término mayor es $(-1)^n\lambda^n$. Este polinomio es llamado polinomio característico del operador A (Lázaro, 2005, p. 294).

Observación:

1. Los autovalores son raíces del polinomio característico.
2. Los polinomios característico p_A de una matriz $n \times n$ es un polinomio unitarios de grado n.

2.2.10. LA FORMA CANÓNICA DE JORDAN

En esta sección se da algunas definiciones elementales sobre la nilpotencia de una transformación lineal y ejemplos que brindan la idea clara sobre esta, a continuación definimos lo siguiente:

Definición 2.2.10.1. Un operado Lineal $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ se denomina nilpotente si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. El índice de un operador nilpotente es el menor $k \in \mathbb{N}$, tal que $A^k = 0$. Esto implica que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$ (Lages, 1998, p. 380).

Un ejemplo sencillo que Lages (1998), brinda a continuación.

Ejemplo 2.2.10.1. El operador de derivación $D: \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_n$ es nilpotente con índice n+1.

Teorema 2.2.10.1. Dado el operador $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$, y sea $u \in \mathbb{E}$ un vector tal que $A^{k-1}(u) \neq 0$ y $A^k(u) = 0$. Entonces $u, A(u), \ldots, A^{k-1}(u)$, son vectores linealmente independientes (Lages, 1998, p. 380).

Demostración:

Sea

$$\alpha_1 u + \alpha_2\, A(u) + \cdots + \alpha_k A^{k-1}(u) = 0$$

Se aplica el operador A^{k-1} en ambos miembros de la igualdad, se obtiene $\alpha_1 A^{k-1}(u) = 0$. Como $A^{k-1}(u) \neq 0$, entonces $\alpha_1 = 0$. Luego

$$\alpha_2\, A(u) + \cdots + \alpha_k A^{k-1}(u) = 0$$

Se aplica el operador A^{k-2} en ambos miembros de la igualdad, Se obtiene $\alpha_2 A^{k-1}(u) = 0$. Como $A^{k-1}(u) \neq 0$, entonces $\alpha_2 = 0$. Prosiguiendo análogamente:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

□

Corolario 2.2.10.1. En un espacio vectorial de dimensión *n*, el índice de un operador nilpotente es $\leq n$ (Lages, 1998, p. 381).

Demostración:

Como $A: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es un operador nilpotente, existe un $k \in \mathbb{N}$, talque $A^k(u) = 0$, con $u \in \mathbb{E}$, supóngase que $A^{k-1}(u) \neq 0$, por el Teorema 2.2.10.1., se obtiene que $u, A(u), \dots, A^{k-1}(u)$ es L.I., luego se toma un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{E}$, por el Corolario 2.2.4.2., $k \leq n$.

□

2.2.11. DEFINICIÓN DE ÁLGEBRAS DE LIE.

En esta sección introduce algunos conceptos básicos de Álgebras de Lie, ejemplos y resultados que proporciona una ayuda para este trabajo de investigación.

Definición 2.2.11.1. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Un Álgebra de Lie bajo $\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial L, dotado con un mapeo bilineal, llamados corchetes de Lie:

$$[\_\,,\_]: L \times L \longrightarrow L$$

$$(x, y) \mapsto [x, y]$$

Satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. Los corchetes de Lie es bilineal:

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$
$$[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$$

   Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{F}$ y para cuales quiera $x, y, z \in L$.
2. Los corchetes de Lie es anti simétrico:

   $[x, y] = -[y, x]$, para todo $x, y \in L$.
3. Los corchetes de Lie satisface las identidad de Jacobi:

   $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$, para cualesquiera $x, y, z \in L$.

   Erdmann y Wildon (2006)

Las siguientes 4 proposiciones son resultados del estudio en este trabajo de investigación y demostradas a continuación.

Proposición 2.2.11.1. La condición 2 se cumple, si y solamente si $[x, x] = 0$, $\forall\, x \in L$.

Demostración:

⇒]

Sea, $[x, y] = -[y, x]$, $\forall\, x, y \in L$, entonces se toma $x = y$, se tiene que:

$[x, x] = -[x, x]$, luego $[x, x] = 0$, $\forall\, x \in L$.

⇐]

Sea ahora $[x, x] = 0$, $\forall\, x \in L$, se tiene que:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y]$$

$$0 = [x, y] + [y, x]$$

Luego se tiene que $[x, y] = -[y, x]$, $\forall\, x, y \in L$.

□

Proposición 2.2.11.2. La identidad de Jacobi es equivalente a decir esto:

$$\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$$

Demostración:

Sea $\left[x,[y,z]\right]+\left[y,[z,x]\right]+\left[z,[x,y]\right]=0$, para cualesquiera $x,y,z\in L$, por la propiedad 2 se cumple:

$$-\left[[y,z],x\right]-\left[y,[z,x]\right]-\left[[x,y],z\right]=0$$

Por lo tanto se tiene:

$$\left[[x,y],z\right]+\left[[y,z],x\right]+\left[[z,x],y\right]=0,\forall\, x,y,z\in L$$

□

Proposición 2.2.11.3. Sea L un álgebra de Lie, entonces $[0,x]=[x,0]=0$, $\forall\, x\in L$

Demostración:

Se prueba primero que $[0,x]=0,\forall\, x\in L$. En efecto:

$$[0,x]=[y-y,x]=[y,x]-[y,x]=0$$

Ahora se prueba que $[x,0]=0,\forall\, x\in L$. En efecto:

$$[x,0]=[x,y-y]=[x,y]-[x,y]=0$$

□

Aquí se presenta un Lema como otro resultado de este trabajo de investigación.

Lema 2.2.11.1. Sea L un álgebra de Lie, supongamos que $x,y\in L$ tal que $[x,y]\neq 0$, entonces $\{x,y\}$ son linealmente independiente bajo $\mathbb{F}$.

Demostración:

Sea $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ y $x,y\in L$ se toma la combinación lineal de la siguiente manera:

$$\alpha x+\beta y=0$$

Lo que se debe demostrar es que $\alpha=\beta=0$. En Efecto. Con la Proposición 2.2.3., se tiene:

$$0 = [x, 0] = [x, \alpha x + \beta y] = \alpha[x, x] + \beta[x, y] = \beta[x, y]$$

$$0 = [y, 0] = [y, \alpha x + \beta y] = \alpha[y, x] + \beta[y, y] = \alpha[x, y]$$

Por lo tanto se tiene que $\alpha = \beta = 0$ pues $[x, y] \neq 0$.

□

Erdmann y Wildon (2006), plante 6 ejemplos a continuación:

Ejemplo 2.2.11.1. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. El producto $(x, y) \longmapsto x \wedge y$ define una estructura de álgebra de Lie bajo $\mathbb{R}^3$. Este álgebra de Lie es denotado por $\mathbb{R}^3_\wedge$. Específicamente, si $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$, entonces:

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Ejemplo 2.2.11.2. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial que está definido los corchetes de Lie por $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$. Este es un algebra de Lie abeliana sobre $\mathbb{V}$.

Ejemplo 2.2.11.3. Ahora sea $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial finito bajo el campo $\mathbb{F}$. Se escribe $gl(\mathbb{V})$ el conjunto de todos lo mapeos de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$. Este es un espacio vectorial bajo el campo $\mathbb{F}$ y esto viene a ser un algebra de Lie, y se le conoce como algebra lineal general, definimos los corchetes de Lie:

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x \text{ , para } x, y \in gl(\mathbb{V})$$

La notación $\circ$ significa la composición de mapeos.

Ejemplo 2.2.11.4. Se escribe $gl(n, \mathbb{F})$ el espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ bajo $\mathbb{F}$ con los corchetes de Lie definidos:

$$[x, y] := xy - yx$$

Donde xy es el producto usual de matrices. Como el espacio vectorial tiene una base de la forma e_{ij} para $1 \leq i, j \leq n$. Aquí e_{ij} es la matriz de $n \times n$ donde tiene 1 en la ij-ésima posición y todas las demás posiciones 0. Nosotros podemos tomar la forma de Lie como:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$$

Donde δ es la delta de Kronecker, definida por $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ en cualquier otro caso.

Ejemplo 2.2.11.5. Se recuerda que la traza de una matriz es la suma de su diagonal. Sea $sl(n, \mathbb{F})$ el subespacio de $gl(n, \mathbb{F})$ que consiste en todas la matrices de traza 0. Para cualquier matrices x e y, la matriz $xy - yx$ tiene traza 0, y $[x, y] := xy - yx$ define una estructura de algebra de Lie sobre $sl(n, \mathbb{F})$. Ésta algebra de Lie es conocida como álgebra lineal especial. Como un espacio de vectores $sl(n, \mathbb{F})$ tiene una base que cosiste en matrices unidad e_{ij}, para $i \neq j$ junto con $e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ para $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo 2.2.11.6. Sea $b(n, \mathbb{F})$ el conjunto de matrices triangulares superiores en $gl(n, \mathbb{F})$. (Una matriz x es llamada triangular superior si cumple con $x_{ij} = 0$ siempre que $i > j$). Esta es un álgebra de Lie con la misma forma de Lie de $gl(n, \mathbb{F})$.

Se define $n(n, \mathbb{F})$ el conjunto de matrices estrictamente triangulares superiores en $gl(n, \mathbb{F})$. (Una matriz x es llamada estrictamente triangular superior si x_{ij} siempre que $i \geq j$). De nuevo ésta es una álgebra de Lie con la misma forma de Lie de $gl(n, \mathbb{F})$.

2.2.12. SUBÁLGEBRA E IDEALES DE UN ALGEBRA DE LIE.

En los últimos ejemplos se da implícitamente la idea de subálgebra de Lie, aquí se define la el concepto de Subálgebra de Lie e Ideal.

Definición 2.2.12.1. Una subálgebra de Lie de L es un subespacio vectorial $K \subseteq L$ tal que (Erdmann y Wildon, 2006, p.3):

$$[x, y] \in K \ \forall x, y \in K$$

Es fácil ver que en los Ejemplos 2.2.11.5., y Ejemplo 2.2.11.6., muestra ejemplos de subálgebra de $gl(n, \mathbb{F})$.

También se define un ideal en las álgebras de Lie.

Definición 2.2.12.2. Un ideal de un algebra de Lie L es un subespacio I de L talque (Erdmann y Wildon, 2006, p.3):

$$[x, y] \in I, \text{ para todo } x \in L, y \in I$$

Erdmann y Wildon (2006), plantea 3 ejemplos de ideales a continuación:

Ejemplo 2.2.12.1 Un ejemplo claro, es que L es un ideal de sí mismo y $\{0\}$, estos son conocidos como ideales triviales.

Ejemplo 2.2.12.2. $sl(n, \mathbb{F})$, es un ideal de $gl(n, \mathbb{F})$.

En Efecto:

Sea $sl(n, \mathbb{F}) = \{x \in gl(n, \mathbb{F}); tra(x) = 0\}$, se toma un elemento $a \in sl(n, \mathbb{F})$ y $b \in gl(n, \mathbb{F})$

$$Tra([a, b]) = Tra(ab - ba) = Tra(a)Tra(b) - Tra(b)Tra(a) = 0 - 0 = 0$$

Luego:

$$[a, b] \in sl(n, \mathbb{F})$$

$\square$

Ejemplo 2.2.12.3. También se nota que $so(n, \mathbb{F})$ es un subálgebra de Lie de $sl(n, \mathbb{F})$ tal que $so(n, \mathbb{F}) = \{x \in Mat(n, \mathbb{F});\ x^t = -x\}$.

Demostración:

1) En efecto se demuestra primero que es un subálgebra de $sl(n, \mathbb{F})$.

   Se tiene que $x, y \in so(n, \mathbb{F})$ son antisimétricas:

   $$(x + y)^t = x^t + y^t = -x - y = -(x + y)$$

   Por lo tanto se tiene que $x + y \in so(n, \mathbb{F})$.

   Luego se toma $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x \in so(n, \mathbb{F})$ se tiene:

   $$(\alpha x)^t = \alpha x^t = \alpha(-x) = -(\alpha x)$$

   Por lo tanto se tiene que $\alpha x \in so(n, \mathbb{F}) \in so(n, \mathbb{F})$.

2) Ahora se examina los corchetes de Lie para $x, y \in so(n, \mathbb{F})$.

   $$[x, y]^t = (xy - yx)^t = (xy)^t - (yx)^t = y^t x^t - x^t y^t = yx - xy = -[x, y]$$

Por lo tanto $[x, y] \in so(n, \mathbb{F})$, luego $so(n, \mathbb{F})$ es un subálgebra de Lie de $sl(n, \mathbb{F})$.

□

Definición 2.2.12.3. El centro de L está definido por:

$$Z(L) := \{x \in L; [x, y] = 0, \forall y \in L\}$$

El cetro de L es un ideal no trivial, este es un ejemplo importante muy frecuente. Ahora se demuestra una proposición, que proporciona la condición necesaria y suficiente para que $Z(L) = L$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 4).

Proposición 2.2.12.1. Sea L un algebra de Lie, $Z(L) = L \Leftrightarrow L$ es abeliano.

(Erdmann y Wildon, 2006, p. 4)

Demostración:

⇒]

Como $Z(L) = L$ entonces $[x, y] = 0 = [y, x]$ $\forall y, x \in L$, por lo tanto L es abeliano.

⇐]

Como L es abeliano $\forall x, y \in L$ $[x, y] = 0$ y por lo tanto se tiene $Z(L) = L$.

□

2.2.13 HOMOMORFISMO EN ALGEBRAS DE LIE.

Así como en teoría de grupos y algebra lineal, en pregrado se da a conocer el primer contacto con los homomorfismos, en esta sección también, se propone algunos resultados y ejemplos, dándose a conocer un nuevo homomorfismo llamado adjunto.

Definición 2.2.13.1. Si L_1 y L_2 son algebras de Lie bajo un campo $\mathbb{F}$, podemos decir que el mapeo $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$, es un homomorfismo, si es un mapeo lineal y satisface la igualdad (Erdmann y Wildon, 2006, p. 4).

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \forall x, y \in L_1$$

Observación:

1) Se nota que en el primer miembro, los corchetes de lie están operados en L_1.
2) También se puede ver que en el segundo miembro las imágenes, de dichos elementos, están operados en L_2.

Definición 2.2.13.2. Decimos que $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$, es un isomorfismo si es un homomorfismo biyectivo (Erdmann y Wildon, 2006, p. 4).

Observación:

Si $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ es un isomorfismo entonces se puede reconocer a L_1 y L_2 identificando a x y $\varphi(x)$ para todo $x \in L_1$. Si tal homomorfismo existe entre L_1 y L_2, entonces se dice que las dos álgebras de Lie son isomorfismos (esencialmente lo mismo). La preposición siguiente proporciona el isomorfismo que existe entre $gl(\mathbb{V})$ y $gl(n, \mathbb{F})$.

Proposición 2.2.13.1. $gl(\mathbb{V})$ Es isomorfo a $gl(n, \mathbb{F})$ (Nazarov, 1997, p. 5).

Demostración:

Dada cualquier base de $\{v_1, \dots, v_n\}$ en $\mathbb{V}$. Para todo $T \in gl(\mathbb{V})$ se considera la matriz $X_T = [x_{ij}]_{i,j=1}^{n}$. Ahora se describir el mapeo en torno a las bases

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \, , \forall\, j = 1, \dots, n$$

Ahora se define $\varphi : gl(\mathbb{V}) \longrightarrow gl(n, \mathbb{F})$ con $\varphi(T) = X_T$, primero se identifica que φ es un homomorfismo. En efecto:

$$\varphi([T, S]) = \varphi(TS - ST) = \varphi(TS) - \varphi(ST) = \varphi(T)\varphi(S) - \varphi(S)\varphi(T)$$

Por lo tanto se tiene $\varphi([T, S]) = [\varphi(T), \varphi(S)]$.

Ahora se demuestra que φ es biyectivo, tomamos

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \, , \forall\, j = 1, \dots, n$$

$$T(v_k) = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} v_i \,, \forall\, k = 1, \dots, n$$

Ahora:

$$\varphi\left(T(v_j)\right) = \varphi\big(S(v_k)\big)$$
$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik} v_i\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\varphi(v_i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} v_i$$
$$T(v_j) = T(v_k)$$

□

Proposición 2.2.13.2. Si L es un álgebra de Lie, el homomorfismo adjunto está definido como (Erdmann y Wildon, 2006, p. 4):

$$ad: L \longrightarrow gl(L)$$

$$x \longrightarrow adx$$

Tal que:

$$(adx)(y) = [x, y]\ \forall x, y \in L$$

Se recuerda que los corchetes de lie son bilineales, eso implica que el operador adx es lineal para cada $x \in L$. Para algunas razones el mapeo $x \longmapsto adx$ es por sí mismo lineal.

Se prueba que cumpla la igualdad:

$$ad[x, y] = [adx, ady]$$

Demostración:

Se $z \in L$, se tiene:

$$(ad[x, y])(z) = \big[[x, y], z\big]$$

$$= -[z, [x, y]]$$

$$= -\{-[x, [y, z]] - [y, [z, x]]\}$$

$$= [x, [y, z]] + [y, [z, x]]$$

$$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

$$= (adx)[y, z] - (ady)[x, z]$$

$$= (adx)\{(ady)(z)\} - (ady)\{(adx)(z)\}$$

$$= (adx \circ ady)(z) - (ady \circ adx)(z)$$

$$= (adx \circ ady - ady \circ adx)(z)$$

$$ad[x, y] = [adx, ady]$$

□

Se da un resultado similar al algebra lineal, este teorema es llevado al algebra de Lie, y se plantea a continuación.

Teorema 2.2.13.1. Si $\varphi: L_1 \longrightarrow L_2$ es un homomorfismo entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1) $Ker\varphi$ es un ideal de L_1.
2) $Im\varphi$ es subálgebra de L_2.

Demostración:

1) Sea $x \in L_1$, $y \in Ker\varphi$, se tiene que $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(y) = 0$, entonces:

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [0,0] = 0$$

$$[x, y] \in Ker\varphi$$

2) Sea $a, b \in Im\varphi$, entonces existen $x, y \in L_1$ tal que $\varphi(x) = a$ y $\varphi(y) = b$

   Luego de tiene que:

$$[a, b] = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y])$$

$$[a, b] \in Im\varphi$$

□

La siguiente definición que se da a continuación proporciona, una clase de operadores lineales que satisfacen una regla conocida del cálculo diferencial.

Definición 2.2.13.3. Sea A un algebra bajo el campo $\mathbb{F}$. Una derivación de A es una transformación lineal $D : A \longrightarrow A$ tal que (Erdmann y Wildon, 2006, p. 6):

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b, \forall a, b \in A$$

Erdmann y Wildon (2006), proponen 3 ejemplos a continuación:

Ejemplo 2.2.13.1. Sea $DerA$ el conjunto de todas las derivaciones de A, el cual es un subespacio vectorial de álgebra asociativa $End(A)$, el conjunto de todos lo endomorfismos que van de A a A. Ahora se define los corchetes de Lie de la siguiente manera, D, E son derivaciones de A:

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D$$

Este último espacio vectorial, definido los corchetes de Lie, determina un algebra de Lie, llamada algebra de derivación del álgebra A.

Demostración:

$$\begin{aligned}
[D, E](ab) &= D \circ E(ab) - E \circ D(ab) \\
&= D(aE(b) + E(a)b) - E(aD(b) + D(a)b) \\
&= D\big(aE(b)\big) + D(E(a)b) - E\big(aD(b)\big) - E(D(a)b) \\
&= aD \circ E(b) + D \circ E(a)b - aE \circ D(b) - E \circ D(a)b \\
&= a[D, E](b) + [D, E](a)b
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.13.2. Sea $A = C^{\infty}(\mathbb{R})$ el espacio de vectores formados por todas la funciones infinitamente diferenciables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para $f, g \in A$, se define el producto fg por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ con la definición que A es un álgebra asociativa. La derivación usual $Df = f'$, es una derivación de A ya que por la regla del producto tenemos.

$$D(fg) = (fg)' = f'g + fg' = (Df)g + f(Dg)$$

Ejemplo 2.2.13.3. Sea L un álgebra de Lie y sea $x \in L$. La función $adx : L \longrightarrow L$ es una derivación de L, ya que, por la identidad de Jacobi se tiene

$$(adx)[y,z] = \big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] + \big[y,[x,z]\big]$$

$$= [(adx)y,z] + [y,(adx)z] \qquad \forall y,z \in L$$

2.2.14. ESTRUCTURAS CONSTANTES DE UN ALGEBRA DE LIE.

Para definir las estructuras constantes, tómese un algebra de Lie L bajo un campo $\mathbb{F}$, y en L se define una base $\{x_1,\dots,x_n\}$. Se puede encontrar las estructuras constantes de acuerdo a la base que se escoge, a continuación se define las estructuras constantes.

Definición 2.2.14.1. Sea L un álgebra de Lie bajo el campo $\mathbb{F}$, entonces el producto de los corchetes de dos elementos básicos cualesquiera se define:

$$\big[x_i,x_j\big] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k} x_k$$

Se recuerda que $a_{ij}^{k} \in \mathbb{F}$ son estructuras constantes con respecto a la base. Se enfatiza que a_{ij}^{k} depende de la elección de la base de L, diferentes bases darán estructuras constantes diferentes (Rodríguez, 2007, p. 9).

Según Rodríguez (2007), afirma: “que las estructura constantes verifican las propiedades correspondientes a la anti simetría y la propiedad de Jacobi de la operación del álgebra de Lie”:

$$a_{ij}^{k} + a_{ji}^{k} = 0$$

$$a_{ij}^{r}a_{kr}^{m} + a_{jk}^{r}a_{ir}^{m} + a_{ki}^{r}a_{jr}^{m} = 0$$

Teorema 2.2.14.1. Si $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ un isomorfismo entre algebras de Lie, entonces existen bases B_1 de L_1 y B_2 de L_2 tal que las estructuras constantes de L_1 con respecto a B_1 son iguales a las estructuras constantes de L_2 con respecto a las base B_2 (Erdmann y Wildon, 2006, p. 5).

Demostración:

Sea $B_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ si se tiene un isomorfismo, entonces tiene la misma dimensión, $B_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$, con $\varphi(x_i) = y_i$:

$$\varphi([x_i, x_j]) = [\varphi(x_i), \varphi(x_j)]$$

$$\varphi([x_i, x_j]) = [y_i, y_j]$$

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{ij}^k y_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \varphi(x_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{ij}^k y_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \varphi(x_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{ij}^k \varphi(x_k)$$

$$a_{ij}^k \varphi(x_k) = b_{ij}^k \varphi(x_k)$$

$$a_{ij}^k = b_{ij}^k$$

□

2.2.15. IDEALES Y HOMOMORFISMOS.

En esta sección se da la noción de construcciones con ideales mostrando también algunos teoremas fundamentales con ideales. Se resalta el teorema fundamental, que es de suma importancia.

Erdmann y Wildon (2006), dice lo siguiente: “Supóngase que I y J son ideales de un algebra de Lie L. Hay varias formas en que se puede construir nuevos ideales desde I y J con el siguiente teorema”.

Teorema 2.2.15.1. Si I y J son ideales de un algebra de Lie L, entonces $I \cap J$ es un ideal de L (Erdmann y Wildon, 2006, p. 11).

Demostración:

Se sabe que $I \cap L$ es un subespacio de L, sea $x \in L$ y $y \in I \cap J$ entonces $y \in I$ y $y \in J$, luego $[x, y] \in I$ y $[x, y] \in J$, entonces $[x, y] \in I \cap J$

□

Teorema 2.2.15.2. Si I y J son ideales de un algebra de Lie L, entonces $I + J$ es un ideal de L (Erdmann y Wildon, 2006, p. 6).

Demostración:

Sea $I + J = \{x + y: x \in I, y \in J\}$, $u \in L$ y $v = x + y \in I + J$

$$[u, v] = [u, x + y] = [u, x] + [u, y]$$

Como $[u, x] \in I$ y $[u, y] \in J$, entonces $[u, v] \in I + J$

□

Definición 2.2.15.1. Sea I y J ideales de una algebra de Lie, el producto de ideales se denota y se define de la siguiente manera (Erdmann y Wildon, 2006, p. 11):

$$[I, J] = Span\{[x, y]: x \in I, y \in J\}$$

Teorema 2.2.15.3. Si I y J son ideales de un algebra de Lie L, entonces $[I, J]$ es un ideal de L (Erdmann y Wildon, 2006, p. 11).

Demostración:

Por definición se tiene que $[I, J]$ es un subespacio de L.

Si $x \in I$, $y \in J$ y $u \in L$, entonces por la identidad de Jacobi se tiene

$$\big[u, [x, y]\big] = \big[x, [u, y]\big] + \big[[u, x], y\big]$$

Aquí se tiene que $[u, y] \in J$ como J es un ideal, entonces $\big[x, [u, y]\big] \in [I, J]$. Similarmente, $[u, x] \in I$ como I es un ideal, entonces $\big[[u, x], y\big] \in [I, J]$. Y por lo tanto su suma pertenece a $[I, J]$.

Ahora se toma un elemento general, $t \in [I, J]$ es una combinación lineal de los corchetes $[x, y]$ con $x \in I$, $y \in J$ es decir:

$$t = \sum c_i [x_i y_i]$$

Donde c_i son escalares y $x_i \in I$, $y_i \in J$ entonces, para algún $u \in L$. Tenemos:

$$[u, t] = \Big[u, \sum c_i [x_i y_i]\Big] = \sum c_i \big[u, [x_i y_i]\big]$$

Donde $\big[u, [x_i y_i]\big] \in [I, J]$ como se mostró arriba. Y por lo tanto $[u, t] \in [I, J]$ y lo que se concluye que $[I, J]$ es un ideal de L.

□

Observación:

Es necesario definir que $[I, J]$ es el generador de los conmutadores de elementos de I y J en lugar de solo el conjunto de tales conmutadores.

Un importante ejemplo de esta construcción ocurre, cuando se toma $I = J = L$, lo que anuncia la siguiente definición (Erdmann y Wildon, 2006, p. 12).

Definición 2.2.15.2. El subálgebra $[L, L]$ de L, es llamada álgebra derivada de L, y se denota usualmente por (Erdmann y Wildon, 2006, p. 12):

$$L' = [L, L] = \left\{\sum c_i[x_i, y_i]\, ; x_i, y_i \in L, c_i \in \mathbb{F}\right\}$$

Erdmann y Wildon (2006), aclara estas ideas sobre la construcción de ideales, proponiendo el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.15.1. Sea L un álgebra de Lie definida de la siguiente manera:

$$L = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{C}\right\}$$

Se observa que:

Si $x = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces, se encuentra los corchetes de Lie de la siguiente manera:

$$[x, y] = xy - yx = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto toda la combinación lineal de la forma

$$c_1[x_1, y_1] + c_2[x_2, y_2] + c_3[x_3, y_3] + \cdots = 0$$

Pues los conmutadores $[x, y]$ son iguales a cero para todo $x, y \in L$. Es claro que toda la combinación lineal $\sum c_i[x_i, y_i] = 0$ y por lo tanto en este caso particular se tiene que $L' = \{0\}$.

En general, Erdmann y Wildon (2006) dice: "si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial, al cual lo dotamos de una función bilineal que cumple con $[x, y] = 0$, para todo $x, y \in \mathbb{V}$, inmediatamente se recuerda que $\mathbb{V}$ tiene una estructura de algebra de Lie. También se puede decir que es un algebra de Lie Abeliana, pues esto demuestra que cualquier espacio vectorial que cumple con dicha condición, resulta un algebra de Lie".

De este ejemplo anterior se puede anunciar un Lema que evidencia cuando un algebra de Lie es abeliano.

Lema 2.2.15.1. Sea L un algebra de Lie, L es abeliano si y solamente si $L' = \{0\}$.

Demostración:

$\Rightarrow]$

Como L es abeliano para todo $x, y \in L$ se tiene $[x, y] = 0$. Entonces tomando $z \in L'$ se tiene la siguiente combinación lineal:

$$z = \sum c_i[x_i, y_i]\, , \forall x_i, y_i \in L$$

$$z = c_1[x_1, y_1] + c_2[x_2, y_2] + c_3[x_3, y_3] + \cdots$$
$$z = c_1 0 + c_2 0 + c_3 0 + \cdots$$
$$z = 0$$

Así pues se tiene que $L' = \{0\}$.

$\Leftarrow$]

Como $L' = \{0\}$ entonces para todo $x, y \in L$ se tiene $[x, y] = 0$, Así pues se tiene que L es abeliano.

□

2.2.16. COCIENTES DE ALGEBRAS DE LIE.

En esta parte se define los cocientes de algebras de Lie, para eso se define bajo un ideal. Si I es un ideal de un algebra de Lie L, entonces I es en particular un subespacio de L, y también se puede considerar la clase lateral $z + I = \{z + x; x \in I\}$ para $z \in L$ y elespacio vectorial cociente definido de la siguiente manera (Erdmann y Wildon, 2006, p. 12).

Definición 2.2.16.1. Sea I un ideal de un algebra de Lie L, entonces se puede definir el álgebra cociente de L por I como:

$$L/I = \{z + I; z \in L\}$$

Se puede denotar también la operación de los elementos de L/I con los corchetes de Lie (Erdmann y Wildon, 2006, p. 13):

$$[w + I, z + I] = [w, z] + I, \text{ para } w, z \in L$$

Para asegurar la forma de álgebra Lie en L/I Erdmann y Wildon, (2006), prueba que la igualdad anterior está bien definida, Se verifica que $[w, z] + I$ depende solo de las clases que contienen a w y z, y no de las clases particulares w y z.

En efecto:

Supóngase que $w + I = w' + I$ y $z + I = z' + I$ entonces $w - w' \in I$ y $z - z' \in I$. Se necesita verificar $[w' + I, z' + I] = [w, z] + I$. Por la bilinealidad de los corchetes de Lie en L:

$$\begin{aligned}[w', z'] &= [w' + (w - w'), z' + (z - z')] \\ &= [w, z] + [w - w', z'] + [w', z - z'] + [w - w', z - z']\end{aligned}$$

Donde los últimos 3 sumandos pertenecen a I. Por lo tanto

$$[w' + I, z' + I] = [w, z] + I$$

Así mismo L/I es un ideal y de la forma L/I es un algebra de Lie.

Los siguientes teoremas describen las propiedades que relacionan los tipos de homomorfismo e isomorfismo, estos teoremas son llamados teoremas de homomorfismo, teorema de isomorfismo.

Teorema 2.2.16.1. (Teorema de homomorfismo) Sea I un ideal de L_1, y sea $\pi: L_1 \longrightarrow L_1/I$ una proyección natural. Supongamos que $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ es un homomorfismo tal que $I \subset Ker\varphi$, entonces existe un homomorfismo único $\tilde{\varphi} : L_1/I \longrightarrow L_2$ satisfaciendo $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 13).

Demostración:

Sea $\tilde{\varphi} : L_1/I \longrightarrow L_2$ dado por $\tilde{\varphi}(x + I) = \varphi(x)$, para cada $x \in I$.

$\varphi(I) = 0$, pues $I \subset Ker\varphi$.

Afirmación: $\tilde{\varphi}$ es un homomorfismo.

En Efecto

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}([x + I, y + I]) &= \tilde{\varphi}([x, y] + I) = \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \\ &= [\tilde{\varphi}(x + I), \tilde{\varphi}(y + I)]\end{aligned}$$

Afirmación: $\tilde{\varphi}$ es único.

En Efecto

Supóngase $\tilde{\varphi}' : L_1/I \longrightarrow L_2$ tal que $\tilde{\varphi}'(x + I) = \varphi(x)$, $v = x + I$ para cada $x \in I$.

$$\tilde{\varphi}(v) = \tilde{\varphi}(x + I\ ) = \varphi(x) = \tilde{\varphi}'(x + I) = \tilde{\varphi}'(v)$$

Luego para concluir la demostración considérese, $\pi(x) = x + I$:

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x + I) = \tilde{\varphi}(\pi(x))$$

$$\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$$

□

Teorema 2.2.16.2. Sea $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces $Ker\varphi$ es un ideal de L_1 y $Im\varphi$ es un subálgebra de L_2, y además (Erdmann y Wildon, 2006, p. 13):

$$L_1/Ker\varphi \cong Im\varphi$$

Demostración:

Se demostró en el Teorema 2.2.13.1., que $Ker\varphi$ es un ideal de L_1 y $Im\varphi$ es un subálgebra de L_2. Ahora se prueba que $\psi : L_1/Ker\varphi \longrightarrow L_1$ es un homomorfismo con $\psi(a + L_1) = a$.

$$\psi([a_1 + L_1, a_2 + L_1]) = \psi([a_1, a_2] + L_1) = [a_1, a_2] = [\psi(a_1 + L_1), \psi(a_2 + L_1)]$$

Ahora se demuestra la existencias del isomorfismo de $L_1/Ker\varphi$ y $Im\varphi$, para eso se define las aplicaciones $\rho : L_1/Ker\varphi \longrightarrow Im\varphi$, $\rho(a + L_1) = \varphi(a)$ y $a_1 + L_1 = b_1$, $a_2 + L_1 = b_2$.

$$\begin{aligned}\rho([b_1, b_2]) &= \rho([a_1 + L_1, a_2 + L_1]) = \rho([a_1, a_2] + L_1) = \varphi([a_1, a_2]) \\ &= [\varphi(a_1), \varphi(a_2)] = [\rho(a_1 + L_1), \rho(a_2 + L_1)] \\ &= [\rho(b_1), \rho(b_2)]\end{aligned}$$

Ahora se demuestra que es inyectiva:

$$\rho(x + L_1) = \rho(y + L_1)$$
$$x = y$$
$$x + L_1 = y + L_1$$

Así se tiene que $L_1/Ker\varphi \cong Im\varphi$ con $\rho = \varphi \circ \psi$.

□

Teorema 2.2.16.3. Si L es un algebra de Lie, I un sub algebra y J un ideal de L, entonces $I \cap J$ es un ideal de I (Erdmann y Wildon, 2006, p. 13).

Demostración:

Tomemos $x \in I$, sea $y \in I \cap J$, entonces $y \in I$ y $y \in J$, se tiene $[x, y] \in I$ y $[x, y] \in J$, luego se tiene que $[x, y] \in I \cap J$.

□

Teorema 2.2.16.4. Si L es un algebra de Lie, I y J ideales de L, entonces $(I + J)/J \cong \mathrm{I}/(\mathrm{I} \cap \mathrm{J})$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 13).

Demostración:

Para demostrar este teorema, se tiene que considerar las siguientes aplicaciones:

1) $\iota: I \to I + J$ mapeo de inclusión.
2) $\pi: I \to \mathrm{I}/(\mathrm{I} \cap \mathrm{J})$ una proyección.
3) $\rho: I + J \to (I + J)/J$ una proyección.
4) $\varphi: \mathrm{I}/(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) \to (I + J)/J$ isomorfismo.

Se sabe que $I + J$ es un subálgebra.

Ahora se define las proyecciones 1) y 3) de la siguiente manera:

$$\iota(x) = x + y$$

$$\rho(x + y) = x + y + J$$

Así se fija:

$$\rho\big(\iota(x)\big) = x + J$$

$$\rho \circ \iota([a,b]) = [a,b] + J = [a + J, b + J] = \big[\rho\big(\iota(a)\big), \rho\big(\iota(b)\big)\big]$$
$$= [\rho \circ \iota(a), \rho \circ \iota(b)]$$

Luego $\rho \circ \iota$ es homomorfismo y además es sobreyectiva.

Afirmación: $Ker\rho \circ \iota = \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$

En efecto

$$\begin{aligned} Ker\rho \circ \iota &= \{v \in I / \rho \circ \iota(v) = 0 + J\} \\ &= \{v \in I / v + J = 0 + J\} \\ &= \{v \in I / v \in J\} \\ &= \mathrm{I} \cap \mathrm{J} \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.2.16.1., se tiene $(I + J)/J \cong \mathrm{I}/(\mathrm{I} \cap \mathrm{J})$

□

Se da un aporte un aporte más en esta sección con respecto a ideales, supóngase que I es un ideal de L un algebra de lie. Hay una correspondencia biyectiva entre los ideales del algebra cociente L/I y los ideales de L que contiene a I, entonces J/I es un ideal de L/I.Por el contrario, si K es un ideal de L/I entonces se establece $J = \{z \in L / z + I \in K\}$. Se puede verificar fácilmente que J es un ideal de L y que J con tiene a K. Estas dos aplicaciones son inversas entre sí (Erdmann y Wildon, 2006, p. 14).

2.2.17. ALGEBRAS DE LIE SOLUBLES.

Las algebras de Lie es una parte del álgebra, que no es imposible para un lector conocedor de elementos básicos abstractos de llegar a entender, en esta parte se estudia un tipo de álgebras de Lie, llamadas algebras de Lie solubles, anteriormente se dio una definición de como denotar un algebra cociente. Aquí se da algunos resultados y una consecuencia que permite ver cuando un algebra cociente es abeliano.

Para empezar, se toma un ideal I del algebra de Lie L y se responde cuando el álgebra cociente L/I es abeliano. El siguiente Lema nos da la respuesta.

Lema 2.2.17.1. Supóngase que I es un ideal de L. Entonces L/I es abeliano si y solamente si I contiene la derivada L'. (Erdmann y Wildon, 2006, p. 27)

Demostración:

El álgebra de Li L/I es abeliana si y solo si para todo $x, y \in L$, tenemos:

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I = I$$

O equivalente, para cada $x, y \in L$ tenemos $[x, y] \in I$. Ya que I es un subespacio de L, esto cumple si y solamente si el espacio es generado por los corchetes $[x, y]$ contenidos en I; esto es $L' \subseteq I$.

$\square$

Este lema dice que el álgebra derivada L' es el ideal más pequeño de L con un cociente abeliano. Por el mismo argumento, el álgebra derivada L' en sí mismo tiene un ideal más pequeño cuyo cociente es abeliano, es decir el álgebra derivada de L', que se denota $L^{(2)}$, y así sucesivamente. Definimos las Series Derivadas de L mediante.

$$L^{(1)} = L'$$
$$L^{(2)} = [L', L']$$
$$\vdots$$
$$L^{(k)} = \left[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}\right], k \geq 2$$

Entonces se cumple que $L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots$, así como el producto de un ideal es un ideal, $L^{(k)}$ es un ideal de L.

Definición 2.2.17.1. El álgebra de Lie es llamado soluble si para algún $m \geq 1$ tenemos $L^{(m)} = 0$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 28).

Lema 2.2.17.2. Si L es un algebra de Lie con ideales

$$L = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_{m-1} \supseteq I_m = 0$$

Tal que I_{k-1}/I_k es abeliano para $1 \leq k \leq m$, entonces L es soluble (Erdmann y Wildon, 2006, p. 28).

Demostración:

Se debe demostrar que $L^{(k)} \subseteq I_k$, $\forall k, 1 \leq k \leq m$. Se utiliza el método de inducción:

$k = 1$ se tiene que I_0/I_1 por hipótesis se tiene que L/I_1 es abeliano, entonces por el Lema 2.9.1., se tiene que $L' \subseteq I_1$, ahora supóngase que se cumple para $k-1$, esto es $L^{(k-1)} \subseteq I_{k-1}$, donde $k \geq 2$, por otro lado se tiene que I_{k-1}/I_k es abeliano, y por el Lema 2.9.1., se tiene que $[I_{k-1}, I_{k-1}] \subseteq I_k$, pero como hipótesis inductiva se tiene $L^{(k-1)}$ está contenido en I_{k-1}, se deduce que:

$$L^{(k)} = \left[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}\right] \subseteq [I_{k-1}, I_{k-1}] \subseteq I_k$$

Por lo tanto $L^{(k)} \subseteq I_k$ así pues tomando $k = m$ se tiene que $L^{(m)} \subseteq I_m$, luego $L^{(m)} = 0$.

□

Lema 2.2.17.3. Sea L_1, L_2 dos algebras de Lie y $\varphi: L_1 \longrightarrow L_2$ un homomorfismo sobreyectivo entre dos algebras de Lie, entonces $\varphi\left({L_1}^{(k)}\right) = (L_2)^{(k)}$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 29).

Demostración:

Para esta demostración se aplica la inducción, para un $k = 0$, es obvio, para $k = 1$, tenemos

$$x_0 \in (L_2)^{(1)} \Leftrightarrow x_0 = \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$$

Donde $x_i, y_i \in L_2$, pero como φ es sobreyectiva, existen $a_i, b_i \in L_1$ tal que

$$x_i, y_i \in L_2 \Leftrightarrow \varphi(a_i) = x_i, \varphi(b_i) = y_i$$

Luego

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=1}^{n} [\varphi(a_i), \varphi(b_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi([a_i, b_i]) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\right) \\ x_0 &\in {L_1}^{(1)} \end{aligned}$$

Y por lo tanto $\varphi\left({L_1}^{(1)}\right) = (L_2)^{(1)}$, ahora supóngase por inducción que $\varphi\left({L_1}^{(k)}\right) = (L_2)^{(k)}$, ahora se prueba que cumple para un $k + 1$. En efecto:

$$x_0 \in (L_2)^{(k+1)} \Leftrightarrow x_0 = \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$$

Donde $x_i, y_i \in {L_2}^{(k)}$, pero como φ es sobreyectiva, existen $a_i, b_i \in {L_1}^{(k)}$ tal que

$$x_i, y_i \in {L_2}^{(k)} \Leftrightarrow \varphi(a_i) = x_i, \varphi(b_i) = y_i$$

Luego

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=1}^{n} [\varphi(a_i), \varphi(b_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi([a_i, b_i]) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\right) \end{aligned}$$

$$x_0 \in {L_1}^{(k+1)}$$

Así se puede concluir que $\varphi\left({L_1}^{(k)}\right) = (L_2)^{(k)}$

□

Lema 2.2.17.4. Sea L un algebra de Lie.

a) Si L es soluble, entonces cada subálgebra y cada imagen homomórfica de L son solubles.

b) Supóngase que L tiene un ideal I tal que I y L/I son solubles, entonces L es soluble.

c) Si I y J son ideales solubles de L, entonces $I + J$ es un ideal soluble de L.

(Erdmann y Wildon, 2006, p. 29)

Demostración:

a) Se observa:

I) Cada Subálgebra de L es soluble.

En Efecto, se utiliza el método por inducción. Afirmamos que si H es un subálgebra soluble de L entonces

$$H^{(k)} \subseteq L^{(k)}, \forall\, k \geq 0$$

En efecto para $k = 1$

$$H^{(1)} = [H, H]$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \middle/ x_i, y_i \in H \right\}$$

$$\subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \middle/ x_i, y_i \in L \right\}$$

$$= L^{(1)}$$

Ahora por se tiene la hipótesis inductiva $H^{(k)} \subseteq L^{(k)}$, entonces

$$H^{(k+1)} = \left[H^{(k)}, H^{(k)}\right]$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \middle/ x_i, y_i \in H^{(k)} \right\}$$

$$\subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \middle/ x_i, y_i \in L^{(k)} \right\}$$

$$= L^{(k+1)}$$

Ahora como L es soluble existe n tal que $L^{(n)} = 0$ y dado que $H^{(k)} \subseteq L^{(k)}$ $, \forall\, k \geq 0$ se obtiene que $H^{(n)} = 0$, así H es soluble.

II) Cada imagen homomórfica de L es soluble.

En Efecto, por hipótesis existe un número natural n tal que ${L_1}^{(n)} = 0$, por el Lema 2.2.17.3., se tiene que $\varphi\left({L_1}^{(k)}\right) = (L_2)^{(k)}$, entonces $0 = \varphi\left({L_1}^{(k)}\right) = (L_2)^{(k)}$, luego ${L_2}^{(n)}$ es soluble.

b) Supóngase $(L/I)^{(n)} = 0$, entonces

$$(L/I)^{(n)} = 0$$

$$L^{(n)}/I = 0$$

$$L^{(n)} \subseteq I$$

Para concluir la demostración se utiliza el siguiente hecho

$$\left(L^{(m)}\right)^{(k)} = L^{(m+k)}$$

El cual se prueba por inducción. Ahora como I es soluble existe un natural m tal que $I^{(m)} = 0$. Como $L^{(n)} \subseteq I$, resulta que $L^{(m+k)} = 0$.

c) Tenemos que $(I + J)/J \cong I/I \cap J$ como la función

$$\pi: I \longrightarrow I/I \cap J$$

$$\pi(x) = x + I \cap J$$

Es sobreyectiva se deduce por (a) que $I/I \cap J$ es soluble y por el isomorfismo se tiene que $(I+J)/J$ es soluble y puesto que J es soluble y por (b) se obtiene que $I+J$ es soluble.

□

Definición 2.2.17.2. Un ideal soluble I en un algebra de Lie L, se dice Soluble Maximal si no existe un ideal soluble de L que contenga propiamente a I (Gonzales, 2002, p. 34).

Como una primera aplicación de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.2.17.1. Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$; entonces existe un único ideal soluble maximal en L (Gonzales, 2002, p. 35).

Demostración:

La existencia es una aplicación del Lema de Zorn (Enunciado en el Anexo 3). Para la unicidad, tenemos:

Caso I: si L es soluble, este es el único soluble maximal y la demostración termina aquí.

Caso II: si L no es soluble, supóngase que I y J son ideales solubles maximales de L, por la proposición 2.2.17.4 (c), se tiene que $I+J$ es soluble, así que es un ideal propio ya que L no es soluble, pero $I \subseteq I+J$ y $J \subseteq I+J$, por la maximalidad se obtiene que $I = I+J = J$.

□

Este ideal soluble maximal en L se llama El Radical de L y se denota $Rad(L)$.

Definición 2.2.17.3. Si L es un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$; tal que $L \neq (0)$, y $Rad(L) = (0)$, L es llamada semisimple (Gonzales, 2002, p. 35).

Se tiene que si un álgebra L es semisimple, entonces no posee ideales excepto ella misma y el cero, además no es soluble.

Proposición 2.2.17.1. Si L es un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y no es soluble (es decir $L \neq Rad(L)$), entonces $L/Rad(L)$ es semisimple (Gonzales, 2002, p. 35).

Demostración:

Como $L \neq Rad(L)$ se tiene que $L/Rad(L) \neq (0)$. Supóngase ahora que H es un ideal soluble de L entonces se puede escribir $H = I/Rad(L)$ donde $Rad(L) \subseteq I$. Ahora por el Lema 2.2.17.4., I es soluble y por la maximalidad del radical $I = Rad(L)$, así $H = (0)$.

$\square$

2.2.18. ALGEBRAS DE LIE NILPOTENTES.

En esta sección se estudia las Algebras de Lie Nilpotente, pues el presente trabajo de investigación se basa en este tema. Se da algunos resultados, definiciones y ejemplos.

Gonzales (2002), nos dice lo siguiente: Se define en esta parte la serie central descendente para un álgebra de Lie L mediante

$$\begin{aligned} L^0 &= L \\ L^1 &= [L, L] = L^{(1)} \\ L^2 &= [L, L^1] \\ &\vdots \\ L^k &= [L, L^{k-1}], \forall\, k \geq 2 \end{aligned}$$

Entonces $L \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots$ como el producto de ideales es un ideal, L^k es un ideal de L. El motivo del nombre "serie central" viene del hecho de que L^k/L^{k+1} esta contenido en el centro de L/L^{k+1}. (p. 36)

Definición 2.2.18.1. Un algebra de lie es llamado nilpotente, si para algún $n \geq 1$ se tiene $L^n = (0)$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 31).

Erdmann y Wildon (2006), plantea un ejemplo a continuación:

Ejemplo 2.2.18.1. Toda algebra abeliana es nilpotente. El siguiente resultado nos relaciona un algebra de Lie soluble y la nilpotencia.

Proposición 2.2.18.1. Si un algebra de Lie L es nilpotente, entonces es soluble (Gonzales, 2002, p. 36).

Demostración:

Afirmamos que $L^{(k)} \subseteq L^k$

En efecto $k = 1$

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= [L, L] \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \Big/ x_i, y_i \in L \right\} \\ &\subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \Big/ x_i, y_i \in L \right\} \\ &= L^1 \end{aligned}$$

Ahora se tiene la hipótesis inductiva

$$L^{(k)} \subseteq L^k$$

Luego

$$\begin{aligned} L^{(k+1)} &= \left[L^{(k)}, L^{(k)} \right] \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \Big/ x_i, y_i \in L^{(k)} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \Big/ x_i, y_i \in L^k \right\} \\ &= L^{k+1} \end{aligned}$$

□

Gonzales (2002), brinda el siguiente ejemplo, para mejor explicación:

Ejemplo 2.2.18.2. Si se considera ahora las matrices $n \times n$ estrictamente triangulares superiores, $L = n(n, \mathbb{F})$, con un sencillo cálculo se puede probar que L es nilpotente esto es:

$$L^1 = \left\{ \left(a_{ij}\right) \in L / c_{ii+1} = 0, \forall i \right\}$$

$$L^2 = \left\{ \left(a_{ij}\right) \in L / c_{ii+1} = c_{ii+2} = 0, \forall i \right\}$$

$$\vdots$$

$$L^{n-1} = \left\{ \left(a_{ij}\right) \in L / c_{ii+1} = c_{ii+2} = \cdots = c_{in} = 0, \forall i \right\}$$

Por lo tanto $L^{n-1} = 0$, así se tiene que el álgebra de Lie $n(n, \mathbb{F})$ es nilpotente.

Lema 2.2.18.1. Sea L un álgebra de Lie. Se tiene que (Erdmann y Wildon, 2006, p. 31):

a) Si L es nilpotente entonces lo son todas sus álgebras y todas sus imágenes homomórficas.

b) Si $L/Z(L)$ es nilpotente lo es L.

c) Si L es nilpotente entonces $Z(L) \neq 0$.

Demostración:

a) Se deduce del hecho siguiente: si H es un subálgebra de L entonces $H^k \subseteq L^k$, $\forall k \geq 1$.

b) Si $(L/Z(L))^n = (0)$ resulta que $L^n \subseteq Z(L)$ de donde

$$L^{n+1} = [L, L^n] \subseteq [L, Z(L)] = (0)$$

c) Supóngase que $L^k = (0)$ y que $L^{k-1} \neq 0$ entonces $L^{k-1} \subseteq Z(L)$ por lo que $Z(L) \neq 0$.

$\square$

2.3. Glosario de términos básicos.

- **Mapeo:** Una mapeo en una transformación o función lineal.

- **Campo:** Estructura algebraica provisto de dos operaciones suma y multiplicación.

- **Cuerpo:** En una estructura algebraica provisto de dos operaciones suma y multiplicación y además tiene división.

- **Sistema Homogéneo:** En él, un sistema lineal es llamado homogéneo cuando el segundo miembro de cada ecuación es igual a cero.

- **Aplicación:** Una aplicación es una función.

- **Propiedad Abeliana:** Se dice que un conjunto cumple con esta propiedad cunado sus elementos conmuta.

- **Serie:** Una expresión de términos, expresados con una notación lógica que sigue un patrón.

- **Lema:** Una proposición demostrada y se usa para probar un teorema.

-**Teorema:** Formula que se demuestra a partir de algo formal.

- **Corolario:** Es una proposición que se deduce.

2.4. Hipótesis.

2.4.1. Hipótesis General:

- Existe en el teorema de Engel una base en la cual todas las transformaciones de un subálgebra de Lie están representadas por matrices triangulares estrictamente superior en el teorema de Engel.

2.4.2. Hipótesis Específica:

- Existe una base de un subálgebra de Lie compuesta por transformaciones lineales en el Teorema de Engel.
- Todas las transformaciones lineales del subálgebra de Lie se pueden representar por matrices triangulares estrictamente superior con dicha base encontrada en el teorema de Engel.

III. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Enfoque y diseño.

En este trabajo de investigación titulado El teorema de Engel en las algebras de Lie, tiene un enfoque cualitativo descriptiva no experimental, que proporciona una evaluación a los resultados obtenido con el fin de proceder a los objetivos que se ha planteado, en este caso se estudiar el teorema ya mencionado explorando el teorema para poder dar con la hipótesis planteada.

3.2. Métodos y procedimientos.

Con la finalidad de alcanzar con los objetivos de este trabajo la metodología que se usa en esta investigación es de tipo descriptiva con un modelo teórico matemático, la lógica matemática cumple un papel importante. Dada un Álgebra de Lie con operadores o transformaciones ad-nilpotentes como elementos, la prueba en otras palabras es encontrar una base en el cual todas las transformaciones ad-nilpotentes de un Álgebra de Lie están representadas por matrices triangulares estrictamente superiores. Se basa dicha información en la recolección de libros escritos y tesis desarrolladas, y llegando al análisis de nuestra hipótesis planteada.

3.3. Técnicas e instrumentos.

En este trabajo se ha utilizado un instrumento, en este caso es la revisión bibliográfica, que proporciona gran cantidad de información, que será útil para el desarrollo de este trabajo de investigación, esta revisión bibliográfica, se da al término de dicho trabajo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Resultados.

En esta sección se discute algunos resultados que ayuda en el análisis del Teorema de Engel en las Algebras de Lie, y próximamente su demostración, para ello se comienza definiendo.

4.1.1. SUBÁLGEBRAS DE $\boldsymbol{gl(V)}$.

Sea L un subálgebra de $gl(V)$. Considérese los elementos de L como transformaciones lineales de $\mathbb{V}$, por lo tanto, los corchetes de Lie ayuda a explorar las composiciones $x \circ y$ de los mapeos lineales para $x, y \in L$. Se debe de tener cuidado, ya que en general la composición no pertenecerá a L. Supóngase que $x \in L$ es un mapeo nilpotente; esto es $x^r = 0$ para algún $r \geq 1$. ¿Qué nos dice acerca de x como un elemento de un algebra de Lie? El siguiente lema proporciona una idea (Erdmann y Wildon, 2006, p. 37).

Lema 4.1.1.1. Sea $x \in L$. Si el mapeo lineal $x: V \longrightarrow V$ es nilpotente, entonces $adx: L \longrightarrow L$ es también nilpotente (Erdmann y Wildon, 2006, p. 37).

Demostración:

Tómese $x \in L$ un mapeo lineal nilpotente, entonces existe un n tal que $x^n = 0$, ahora se construye dos mapeos en L, de la siguiente manera:

$A: L \longrightarrow L$ con $A(y) = xy$, $B: L \longrightarrow L$ con $B(y) = yx$.

Afirmación: A y B son conmutativas.

En efecto:

$$AB(y) = A\big(B(y)\big) = A(yx) = xyx = B(xy) = B\big(A(y)\big) = AB(y)$$

Ahora, se tiene que $A^n(y) = x^n y$ y $B^n(y) = yx^n$, luego se tiene que $A^n = 0$ y $B^n = 0$, por lo tanto A y B son nilpotentes. Ahora se toma $adx = A - B$, luego:

$$(adx)^{2n} = (A - B)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} A^{2n-k}(-B)^k = 0$$

□

Lema 4.1.1.1. Si L es nilpotente es decir $L^n = 0$, entonces para cualquier $x_0, \dots, x_n \in L$, $\left[x_n, \left[\dots\left[x_2, [x_1, x_0]\right]\right]\right] = adx_n\left(adx_{n-1}\left(\dots\left(adx_1(x_0)\right)\right)\right) = 0$ (Gonzales, 2002, p. 38).

Demostración:

Se tiene que:

$$[x_1, x_0] \in L^1$$
$$\left[x_2, [x_1, x_0]\right] \in L^2$$
$$\vdots$$
$$\left[x_n, \left[\dots\left[x_2, [x_1, x_0]\right]\right]\right] \in L^n = 0$$

Así se tiene que $\left[x_n, \left[\dots\left[x_2, [x_1, x_0]\right]\right]\right] = adx_n\left(adx_{n-1}\left(\dots\left(adx_1(x_0)\right)\right)\right) = 0$, En particular si $x = x_1 =, \dots, = x_n$, se obtiene que $(adx)^n = 0, \forall x \in L$.

$\square$

En el álgebra Lineal, a menudo se estudia en los valores propios y vectores propios de una transformación lineal. Ahora se generaliza esta noción a la familia de mapeos lineales. Sea A un subálgebra de $gl(V)$. Parece razonable decir que $v \in \mathbb{V}$ es un vector propio para A si v es un vector propio para cada elemento de A; es decir, $a(v) \in \text{Span}\{v\}$ para cada $a \in A$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 38).

Se puede especificar los valores propios de los elementos de A dando una función $\lambda: A \longrightarrow \mathbb{F}$. El espacio propio correspondiente es:

$$V_\lambda = \{v \in V: a(v) = \lambda(a)v, \forall a \in A\}$$

Se puede ver que el espacio propio es un subespacio de V y es notorio que no todas las funciones $A \longrightarrow \mathbb{F}$ pueden tener un espacio propio distinto de cero. Supóngase que V_λ es un espacio propio distinto de cero para la función $\lambda: A \longrightarrow \mathbb{F}$. Sea $v \in V_\lambda$ distinto de cero, sea $a, b \in A$, y sea $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Entonces

$$(\alpha a + \beta b)v = \alpha(av) + \beta(bv) = \alpha\lambda(a)v + \beta\lambda(b)v = \left(\alpha\lambda(a) + \beta\lambda(b)\right)v$$

Por lo que el valor propio de $\alpha a + \beta b$ en v es $\alpha\lambda(a) + \beta\lambda(b)$. En otras palabras, $\lambda(\alpha a + \beta b) = \alpha\lambda(a) + \beta\lambda(b)$. Así λ es lineal y por lo tanto $\lambda \in A^*$, el espacio dual de mapeos lineales de A a $\mathbb{F}$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 38).

Definición 4.1.1.1. Un valor para un subálgebra de Lie A de $gl(V)$ es un mapeo lineal $\lambda: A \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $V_\lambda = \{v \in V: a(v) = \lambda(a)v, \forall a \in A\}$ es un subespacio de V diferente de cero (Erdmann y Wildon, 2006, p. 39).

El espacio vectorial V_λ es el espacio propio asociado al valor λ. Por lo tanto V_λ es diferente de cero si y solamente si V contiene un vector propio común para los elementos de A, con los valores propios de los elementos de A dados por la función λ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 39).

4.1.2. EL LEMA INVARIANTE.

En álgebra lineal, se demuestra que si $a, b: V \longrightarrow V$ transformaciones lineales están conmutando y que W es el núcleo de a, entonces W es b-invarinte. Esto es b es un mapeo de W en W. La prueba de este lema es muy fácil: Si $w \in W$, entonces $a(bw) = b(aw) = 0$ y por lo tanto $bw \in W$. Este resultado tiene una generalización en subálgebras de Lie de $gl(V)$ como sigue:

Lema 4.1.2.1. Supóngase que A es un ideal de un subálgebra de Lie de $gl(V)$. Sea

$$W = \{v \in V: a(v) = 0, \forall a \in A\}$$

Entonces Wes un subespacio L-invariante de V (Erdmann y Wildon, 2006, p. 40).

Demostración:

Se toma $w \in W$ y $y \in L$. Se debe probar que $a(yw) = 0$ para $a \in A$. Pero $ay = ya + [a, y]$, donde $[a, y] \in A$ como A es un ideal, se tiene

$$a(yw) = y(aw) + [a, y](w) = 0$$

□

La técnica utilizada aquí para reemplazar ay con $ya + [a, y]$, es muy útil. Se utiliza este remplazo en varias ocasiones en adelante.

Se ha tratado con valores propios con valor cero. De manera más general, se puede demostrar que si $a, b: V \longrightarrow V$ son mapeos lineales conmutativos, $\lambda \in \mathbb{F}$, y V_λ es un $\lambda-$espacio propio de a (eso es $V_\lambda = \{v \in V: av = \lambda v\}$), entonces V_λ es invariante bajo b. Este hecho tiene una generalización para algebras de Lie. Como antes, se reemplaza el mapeo lineal a por un ideal $A \subseteq gl(V)$. El espacio considerado en el Lema 4.1.2.1., puede verse como el $0 -$ espacio propio para A. En general, se permite un valor arbitrario (Erdmann y Wildon, 2006, p. 40).

Lema 4.1.2.2. (Lema Invariante) Supóngase que $\mathbb{F}$ tiene característica cero. Sea L un subálgebra de Lie de $gl(V)$ y sea A un ideal de L. Sea $\lambda: A \longrightarrow \mathbb{F}$ sea un valor de A. El espacio asociado

$$V_\lambda = \{v \in V: av = \lambda(a)v, \forall a \in A\}$$

Es un subespacio $L -$ invariante de V (Erdmann y Wildon, 2006, p. 40).

Demostración:

Se demuestra que si $y \in L$ y $w \in V_\lambda$, entonces $y(w)$ es un vector propio para cada elemento de A, con valor propio de $a \in A$ dado por $\lambda(a)$.

Para $a \in A$, tenemos

$$a(yw) = y(aw) + [a, y](w) = \lambda(a)yw + \lambda([a, y])w$$

Note que $[a, y] \in A$ por se A un ideal. Por lo tanto todo lo que se necesita demostrar es que el valor propio del conmutador $[a, y]$ sobre V_λ es cero.

Considere $U = \text{Span}\{w, y(w), y^2(w), \dots,\}$. Este es un subespacio de dimensión finita de V. Sea m el número menor tal que los vectores $w, y(w), \dots, y^m(w)$ sean linealmente dependientes. Este es un ejercicio directo en el álgebra lineal para mostrar que U es $m -$dimensional y tiene una base

$$w, y(w), \dots, y^{m-1}(w)$$

Afirmamos que si $z \in A$, entonces z asigna U en sí mismo. De hecho, se demuestra que con respecto a la base anterior, z tiene una matriz superior con entradas diagonales iguales a $\lambda(z)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda(z) & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda(z) & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda(z) \end{pmatrix}$$

Se trabaja por inducción sobre el número de la columna. En primer lugar, $zw = \lambda(z)w$. Esto da la primera columna de la matriz. A continuación, ya que $[z, y] \in A$, se tiene:

$$z(yw) = y(zw) + [z, y]w = \lambda(z)y(w) + \lambda([z, y])w$$

Se da la segunda columna, ahora para una columna r, tenemos

$$z\big(y^r(w)\big) = zy(y^{r-1}w) = (yz + [z, y])y^{r-1}w$$

Por la hipótesis inductiva se dice que:

$$z(y^{r-1}w) = \lambda(z)y^{r-1}w + u$$

Para algún u en el $Span$ de $\{y^j w: j < r - 1\}$. Sustituyendo esto da:

$$yz(y^{r-1}w) = \lambda(z)y^r w + yu$$

Y yu pertenece al $Span$ del $\{y^j w: j < r\}$. Además, desde $[z, y] \in A$, se obtiene por inducción que:

$$[z, y]y^{r-1}w = v$$

Para algún v en el $Span$ de $\{y^j w: j \leq r-1\}$. La combinación de estos dos últimos resultado se prueba la columna r es la que se indica.

Ahora tomemos $z = [a, y]$. Se termina de mostrar que la traza de una matriz de z actuando sobre U es $m\lambda(z)$. Por lo tanto, en el párrafo anterior, U es invariante bajo la acción de $a \in A$, y U es $y -$ invariante por construcción. Así la traza de z sobre U es la traza de z sobre U es la traza de $ay - ya$, también visto como una transformación lineal de U, y esto es obviamente 0. Por lo tanto.

$$m\lambda([a, y]) = 0$$

Como F tiene característica cero, se deduce que $\lambda([a, y]) = 0$.

□

4.1.3. TEOREMA DE ENGEL

En esta sección, se analiza el teorema de Engel en las algebras de Lie, este teorema da la condición para que un álgebra de Lie sea nilpotente. Para ellos enunciaremos el teorema.

Teorema de Engel

Sea V un espacio vectorial. Supóngase que L es un subálgebra de Lie de $gl(V)$ tal que cada elemento de L es una transformación lineal nilpotente de V. Entonces existe una base de V en la que cada elemento de L es representado por una matriz triangular estrictamente superior.

La demostración del teorema de Engel, se da a continuación, pues para ellos se enuncian los siguientes resultados.

Lema 4.1.3.1. Sea V un espacio vectorial con dimensión $n \geq 1$ y sea $x: V \longrightarrow V$ un mapeo lineal nilpotente, entonces existe un elemento $0 \neq v \in V$ tal que $xv = 0$ (Erdmann y Wildon, 2006, p. 46).

Demostración:

Como x es nilpotente entonces existe n tal que $x^n = 0$, se sabe que $x^{n-1} \neq \{0\}$, asi se puede decir que $x^{n-1}V \neq \{0\}$. Sea $w \in V$ tal que $v = x^{n-1}w \neq 0$, luego se tiene:

$$xv = x(x^{n-1}w) = x^n w = 0w = 0$$

$\square$

El paso crucial en la demostración del Teorema de Engel es análogo al Lema 4.1.3.1., es decir, debemos encontrar un vector distinto de cero $v \in V$ que se encuentre en el núcleo de cada $x \in L$.

Lema 4.1.3.2. Sea V un espacio vectorial con dimensión $n \geq 1$ y sea $x: V \longrightarrow V$ un mapeo lineal nilpotente, se tiene que (Erdmann y Wildon, 2006, p. 46):

a) Si $U = \text{Span}\{v\}$, entonces x induce una transformación lineal nilpotente $\bar{x}: V/U \to V/U$.

b) Existe una base $\{v_1 + U, \dots, v_{n-1} + U\}$ de V/U en la cual $\bar{x}$ tiene una matriz triangular estrictamente superior.

c) El conjunto $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es una base de V y que la matriz de x en esta base es estrictamente triangular superior

Demostración:

a) Ahora se define $\bar{x}$ de la siguiente manera:

$$\bar{x} = x + U$$

$$\bar{x}(v + U) = x(v) + U$$

Ahora se ve si está bien definido, tomemos $v_1, v_2 \in V$ y $v_1 + U, v_2 + U \in V/U$:

$$\begin{aligned}
\bar{x}\big((v_1 + U) + (v_2 + U)\big) &= \bar{x}(v_1 + v_2 + U) \\
&= x(v_1 + v_2) + U \\
&= x(v_1) + x(v_2) + U \\
&= x(v_1) + U + x(v_2) + U \\
&= \bar{x}(v_1 + U) + \bar{x}(v_2 + U)
\end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$

$$\bar{x}\big(\alpha(v + U)\big) = \bar{x}(\alpha v + U) = x(\alpha v) + U = \alpha(x(v) + U)$$

Se ve si está definido bajo los corchetes de Lie:

$$\begin{aligned}
\bar{x}([v_1 + U, v_2 + U]) &= \bar{x}([v_1, v_2] + U) \\
&= x([v_1, v_2]) + U
\end{aligned}$$

$$= [x(v_1), x(v_2)] + U$$
$$= [x(v_1) + U, x(v_2) + U]$$
$$= [\bar{x}(v_1 + U), \bar{x}(v_2 + U)]$$

Luego $\bar{x}^n = (x + U)^n = x^n + U$, como x es nilpotente, entonces $x^n = 0$, así se tiene que $\bar{x}^n = \overline{\mathbf{0}}$.

b) Se demuestra por inducción que $\{v_1 + U, \ldots, v_{n-1} + U\}$ es una base de V/U:
Si $V = \{0\}$, esto es obvio pues se cumple la tesis, ahora supóngase que $dimV \geq 1$, se tiene que $\dim V/U = \dim V - \dim U = n - 1$, luego como $\bar{x}$ es nilpotente, entonces se construye:

$$V_0 = \{0\}$$
$$V_1 = Ker\bar{x}$$
$$V_2 = Ker\bar{x}^2$$
$$\vdots$$
$$V_m = Ker\bar{x}^m = V/U$$

Afirmación: $V_i \subset V_{i+1}$

En efecto, sea $w \in V_i$, entonces $\bar{x}^i(w) = \overline{\mathbf{0}}$, (notaremos al vector $\overline{\mathbf{0}}$ como el elemento cero del espacio cociente) luego $\bar{x}^{i+1}(w) = \bar{x}\left(\bar{x}^i(w)\right) = \overline{\mathbf{0}}$, por el cual se tiene que $w \in V_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, m$.

Ahora se discute si V_i es un subespacio propio. En efecto, como m es potencia mínima de $\bar{x}$ tal que $\bar{x}^m = \overline{\mathbf{0}}$, se tiene que existe $u \neq 0$ tal que $\bar{x}^i(u) \neq \overline{\mathbf{0}}$, si $i < m$, con $\bar{x}^m(u) = \overline{\mathbf{0}}$.

Ahora luego se toma $u_{i+1} = \bar{x}^{m-i-1}(u)$.Entonces:

$$\bar{x}^i(u_{i+1}) = \bar{x}^i\left(\bar{x}^{m-i-1}(u)\right) = \bar{x}^{m-1}(u) \neq \overline{\mathbf{0}}$$

Pero

$$\bar{x}^{i+1}(u_{i+1}) = \bar{x}^i\left(\bar{x}^{m-i-1}(u)\right) = \bar{x}^m(u) = \overline{\mathbf{0}}$$

Así, $u_{i+1} \notin V_i$, pero $u_{i+1} \in V_{i+1}$, entonces cada V_i es un subconjunto propio.

Ahora para construir por inducción una base tomemos $\dim V_i = k_i$, como V_1 es un subespacio, tiene una base $B_1 = \left\{v_1^{(1)} + U, \ldots, v_{k_1}^{(1)} + U\right\}$, como V_1es subespacio de V_2 por el Teorema 2.2.4.5., V_2 tiene una base B_2 que se extiende la base B_1 de V_1

$$B_2 = \left\{v_1^{(1)} + U, \ldots, v_{k_1}^{(1)} + U, v_{k_1+1}^{(2)} + U, \ldots, v_{k_2}^{(2)} + U\right\}$$

De la misma forma se extiende B_2 a una base de B_3 de V_3, B_3 a una base de V_4 y así sucesivamente hasta encontrar una base

$\bar{B} = \left\{v_1^{(1)} + U, \dots, v_{k_1}^{(1)} + U, v_{k_1+1}^{(2)} + U, \dots, v_{n-1}^{(m)} + U\right\}$ de $V_m = V/U$

Afirmación: $\bar{x}(V_i) \subset V_{i-1}$

En efecto, sea $\bar{x}(w) \in \bar{x}(V_i)$, entonces $w \in V_i$ tal que $\bar{x}(w) = \bar{\mathbf{0}}$, luego $\bar{x}^{i-1}\big(\bar{x}(w)\big) = \bar{\mathbf{0}}$, entonces $\bar{x}(w) \in V_{i-1}$.

Notemos que $w \in V_k$, tenemos $\bar{x}(w) \in V_{k-1}$, ahora si $v_j + U \in V_k \backslash V_{k-1}$, entonces $\bar{x}\big(v_j + U\big) \in V_{k-1}$

Así hemos creado una base $\bar{B} = \{v_1 + U, \dots, v_{n-1} + U\}$ de V/U, así se tiene:

$$\bar{x}\big(v_j + U\big) = \sum_{i=1}^{j-1} c_{ij}(v_i + U)$$

Con $[\bar{x}]_{\bar{B}} = \big[c_{ij}\big]$ la matriz con $c_{ij} = 0$ si $j \leq i$ así se tiene que $[\bar{x}]_B$ es una matriz estrictamente superior.

c) Se recuerda que $x(v) = 0 \subseteq U$, con $U = \text{Span}\{v\}$, ahora por inducción se encuentra una base para V. Si $v_1 + U \in Ker\bar{x}$, se tiene que:

$$x(U) \subseteq U$$

$\bar{\mathbf{0}} = 0 + U = \bar{x}(v_1 + U) = x(v_1) + U = U \Longrightarrow x(v_1) \in \text{Span}\{v\}$

$\bar{x}(v_2 + U) = x(v_2) + U \in \text{Span}\{U, v_1 + U\} \Longrightarrow x(v_2) \in \text{Span}\{v, v_1\}$

$\bar{x}(v_3 + U) = x(v_3) + U \in \text{Span}\{U, v_1 + U, v_2 + U\} \Longrightarrow x(v_3) \in \text{Span}\{v, v_1, v_2\}$

$\bar{x}(v_4 + U) = x(v_4) + U \in \text{Span}\{U, v_1 + U, v_2 + U, v_3 + U\}$

$$\Longrightarrow x(v_4) \in \text{Span}\{v, v_1, v_2, v_3\}$$

Ahora se tiene:

$$\bar{x}(v_n + U) = x(v_n) + U \in \text{Span}\{U, v_1 + U, v_2 + U, \dots, v_{n-1} + U\}$$
$$\Longrightarrow x(v_n) \in \text{Span}\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

Se ve ahora que $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es linealmente independiente:

Se toma una combinación lineal nula, es decir:

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = 0$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{0}} = 0 + U &= \bar{x}(\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + U) \\ &= \bar{x}(\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + U) \\ &= \alpha x(v) + \alpha_1 x(v_1) + \cdots + \alpha_{n-1} x(v_{n-1}) + U\end{aligned}$$

$$= \alpha_1(x(v_1) + U) + \cdots + \alpha_{n-1}(x(v_{n-1}) + U)$$

Como $\{v_1 + U, v_2 + U, \ldots, v_{n-1} + U\}$ es una base en V/U se tiene que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$$

Así pues $\alpha = 0$, luego$B = \{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es una base, y $x: V \to V$ tiene una matriz $[x]_B$ triangular estrictamente superior, tal que

$$x(v_j) = \sum_{i=1}^{j-1} c_{ij} v_i$$

□

Teorema 4.1.3.1. Sea L un subálgebra de $gl(V)$, donde V distinto de cero, tal que cada elemento de L es una transformación lineal nilpotente. Entonces existe algún $v \in V$ diferente de cero tal que $xv = 0$, para todo $x \in L$(Erdmann y Wildon, 2006, p. 36).

Demostración:

Se prueba esto por inducción sobre la dimensión de L.

Si $dim\, L = 1$, entonces $L = kx$, donde x es una transformación lineal nilpotente, por el Lema 4.1.3.1., para cualquier $z \in L$ existe $0 \neq v \in V$ se tiene:

$$zv = kxv = k0 = 0$$

Ahora se prueba para $\dim L > 1$.

Paso 1: Se toma un subálgebra de Lie A de L que sea máximo. Se afirma que A es un ideal de L y que $dim\, A = n - 1$. Se considera el espacio vectorial cociente, y se define el siguiente mapeo lineal:

$$\varphi: A \longrightarrow gl(L/A)$$

Permitiendo que $\varphi(a)$ actúe sobre L/A de la forma:

$$\varphi(a)(x + A) = [a, x] + A$$

Esto está bien definido, por si $x \in A$ entonces $[a, x] \in A$. Además, φ es un homomorfismo de Lie, para algún $a, b \in A$ entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi([a,b])(x + A) &= \big[[a,b],x\big] + A \\
&= \big[a,[b,x]\big] - \big[b,[a,x]\big] + A \\
&= \big(\big[a,[b,x]\big] + A\big) - \big(\big[b,[a,x]\big] + A\big) \\
&= \varphi(a)([b,x] + A) - \varphi(b)([a,x] + A) \\
&= \varphi(a)\varphi(b)(x + A) - \varphi(b)\varphi(a)(x + A) \\
&= [\varphi(a), \varphi(b)](x + A)
\end{aligned}$$

Por la identidad de Jacobi, se puede obtener el último término.

Entonces $\varphi(A)$ es un subálgebra de $gl(L/A)$ y $dim\varphi(A) < dim\, L$. Para aplicar la hipótesis inductiva, se necesita saber que $\varphi(A)$ es una transformación lineal nilpotente de L/A. Pero $\varphi(a)$ es inducido por $ad\, a$; por el Lema 4.1.3.1., se sabe que $ada: L \longrightarrow L$ es nilpotente y por lo tanto $\varphi(a)$ también lo es.

Por hipótesis inductiva, existe un elemento diferente de cero $y + A \in L/A$ tal que $\varphi(a)(y + A) = [a, y] + A = 0$, para todo $a \in A$. Es decir, $[a, y] \in A$, para todo $a \in A$. Establecemos el conjunto $\tilde{A} = A \oplus \text{Span}\{y\}$. Este es un subálgebra de Lie que contiene A. Por maximalidad, $\tilde{A}$ debe ser igual a L. Por lo tanto

$$L = A \oplus \text{Span}\{y\}$$

Como A es un ideal en $\tilde{A}$, por lo consiguiente A es un ideal de L.

Paso 2: Ahora se aplica la hipótesis inductiva a $A \subseteq gl(V)$. Esto da un vector diferente de cero $w \in V$ tal que $a(w) = 0$ para todo $a \in A$, por lo tanto:

$$W = \{v \in V : a(w) = 0, \forall a \in A\}$$

Es un subespacio de V diferente de cero.

Por el Lema 4.1.2.1., W es invariante bajo L, y en particular $y(W) \subseteq W$. Dado que es nilpotente, la restricción de y en W es también nilpotente. Y por lo tanto algunos vectores no nulos $v \in W$ tal que $y(v) = 0$. Se puede escribir cualquier $x \in L$ en la forma $x = a + \beta y$, para algún $a \in A$ y algún $\beta \in \mathbb{F}$. Haciendo esto se tiene:

$$x(v) = a(v) + \beta y(v) = 0$$

Esto demuestra que v es un vector no nulo en el Núcleo de cada de L.

$\square$

Demostración del Teorema de Engel:

Se prueba, en esta parte utilizando la Proposición 4.1.3.2., ahora se aplica la inducción en la $dimV = n$.

Si $\text{V} = \{0\}$, entonces no hay nada que hacer, ya que cumple con la hipótesis del teorema de Engel.

Ahora asúmase que $dimV = n \geq 1$, por la Teorema 4.1.3.1., existe un vector diferente de cero $v \in V$ tal que $x(v) = 0$, para todo $x \in L$. Sea $U = Span\{v\}$ y sea $\bar{V}$ el espacio vectorial cociente, es decir $\bar{V} = V/U$, para algún $x \in L$ induce una transformación lineal $\bar{x} \in \bar{V}$. El mapeo dado por:

$$L \to gl(\bar{V})$$
$$x \mapsto \bar{x}$$

A simple vista es homomorfismo, análogo a la Proposición 4.1.3.2. La imagen de L bajo este homomorfismo es un subálgebra de $gl(\bar{V})$, donde satisface las hipótesis del Teorema de Engel, así se ha construido un homomorfismo que tenga las condiciones de dicho teorema.

Además, $dim\bar{V} = n - 1$, por la Proposición 4.1.3.2., existe una base de $\bar{V}$ tal que con respeto esta base todos los $\bar{x}$ tienen una matriz estrictamente triangular superior. Si esta base es $\{v_i + U/1 \leq i \leq n-1\}$, entonces $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es una base de V. Como $x(v) = 0$, para cada $x \in L$, las matrices de los elementos de L con respecto a esta base son estrictamente triangular superior.

□

Se da otro punto de vista para el teorema de Engel, Erdmann y Wildon (2006), dice: No nos basaremos en L subálgebra de $gl(V)$, recordemos que un algebra de Lie es nilpotente si para algún $m \geq 1$, se tiene que $L^m = 0$, o equivalentemente podemos decir, si para cada $x_0, x_1, \ldots, x_m \in V$ se tiene que:

$$\left[x_0, [x_1, \ldots, [x_{m-1}, x_m] \ldots]\right] = (adx_0 \circ adx_1 \circ \ldots \circ adx_{m-1})(x_m) = 0$$

Se da a continuación un resultado del teorema de Engel.

Teorema 4.1.3.2. Un algebra de Lie de dimensión finita L es nilpotente si y solamente para cada $x \in L$ el mapeo lineal $adx: L \to L$ es nilpotente (Erdmann y Wildon, 2006, p. 46).

Demostración:

⇒]

Si L es nilpotente entonces existe n tal que $L^n = 0$, esto equivale decir lo mismo en la siguiente expresión, si para cada $x_0, x_1, \ldots, x_n \in L$ se tiene que:

$$\left[x_0, [x_1, \ldots, [x_{n-1}, x_n] \ldots]\right] = 0$$

Es decir:

$$(adx_0 \circ adx_1 \circ \ldots \circ adx_{m-1})(x_m) = 0$$

Y en particular eso $(adx)^m = 0$ para cada $x \in L$, así cada elemento $x \in L$ el mapeo lineal $adx: L \to L$ es nilpotente.

⇐]

Sea L un algebra de Lie de dimensión finita con todos los elementos ad-nilpotentes. Por lo tanto, el álgebra de Lie $adL \subset gl(L)$, por el Teorema 4.1.3.1, cada elemento adL es una transformación lineal nilpotente, entonces existe $x \in L$ tal que

$$adL(x) = [L, x] = 0$$

Y entonces, $Z(L) \neq 0$, denotemos $Z = Z(L)$. Sea $x + Z, y + Z \in L/Z$. Entonces:

$$\big(ad(x + Z)\big)^n (y + Z) = \big[x + Z, \big[x + Z, \dots [x + Z, y + Z]\big]\big]$$

$$= \big[x, \big[x, \dots [x, y]\big]\big] + Z \qquad = (adx)^n(y) + Z$$

Por lo tanto, $L/Z(L)$ consta de elementos ad-nilpotentes y tiene dimensión menor que L. Ahora por inducción se tiene que $L/Z(L)$ es nilpotente. Por el Lema 2.2.18.1, luego se tiene que L es nilpotente.

$\square$

4.2. Discusión.

En la investigación desarrollada, tuvo como propósito analizar los resultados obtenidos dentro de un punto principal, el Teorema de Engel, así se puede decir:

Estos datos obtenidos proporciona en un Subálgebra de un Algebra de Lie compuesta por transformaciones lineales (operadores lineales) la existencia de una base (en nuestro estudio se pudo construir una base aplicando el método de inducción), dicha construcción no solo aclara dicha existencia sino que cada transformación lineal (operador lineal) en dicha base se puede representar por una matriz triangulas estrictamente superior.

El resultado verifica que esta base de un subálgebra de Lie está compuesta por trasformaciones lineales, y esta base se genera gracias a la propiedad de nilpotencia de una transformación lineal.

Sé verifica que cada trasformación lineal de un subálgebra de Lie es representado por matrices triangulares estrictamente superior, dichas matrices no son únicas, varían depende a la base encontrada.

Sé verifica lo que Jacobson (1961) afirma y en la revista *"Scientia et Technica"* Año XIV, No 39, (2008), ahora es importante resalta a Erdmann y Wildon (2006), tomando la dimensión 1, nota que el teorema de Engel no cumple, pues el "solo si" es falsa, y tampoco cuando la dimensión es infinita. El teorema de Engel, es aplicado para poder demostrar el teorema de Lie y para subálgebra de Lie de dimensión 2 con la condición que dicha subálgebra sea abeliana.

CONCLUSIONES

Del desarrollo del trabajo de investigación sobre teorema de Engel se puede obtener las siguientes conclusiones:

1. La base de una subálgebra de Lie compuesta por transformaciones lineales existe bajo la hipótesis de que dichas transformaciones lineales sean nilpotentes.
2. Todas las trasformaciones lineales de una subálgebra de Lie bajo una base, se pueden representar por matrices triangulares estrictamente superior es con dicha base encontrada.

RECOMENDACIONES

1) En este trabajo se usó el método de inducción con el fin de analizar el teorema de Engel en las álgebras de Lie, se recomienda a los futuros investigadores un estudio a profundidad en las álgebras de Lie nilpotentes.

2) Dado que en este trabajo se analizó el teorema de Engel en las álgebras de Lie donde solo se cumple para dimensión finita, se recomienda hacer un estudio para aplicarlo en un subálgebra de dimensión infinita.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anton, H. (1986). Introducción al álgebra lineal. Limusa

Delgado, J., & Frensel, K, (2005). Introdución al álgebra lineal. Instituto de Matemática. UFF

Erdmann, K., & Wildon, M., (2006). *Introduction to Lie Algebra*. USA: Springer-Verlag London.

Fuentes, L., & López, V., (2013). *Introducción a las Algebras de Lie.* (Tesis de pregrado). Universidad de el Salvador. Ciudad Universitaria del Oriente, San Miguel. El salvador.

Gonzales, J., (2002) *Álgebra de Lie cuasicristales.* (Tesis de maestría). Universidad de los Andes. Venezuela

Gutiérrez, A., Mora, C. A., & Poveda, Y. A. (2008). El Teorema De Engel. *Scientia et technica*, *2*(39).

Humphreys, J., (1980). *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* New York. USA: Springer-Verlag.

Jacobson, N., (1961). *Lie Algebras.* New Haven Connecticut. USA: Intersciencie Publishers.

Lages, E., (1998). *Algebra Lineal.* Lima. Peru: Texto IMCA.

Lázaro C, M. (2005). *Algebra Lineal.* 2da. *Edición. Edit. MOSHERA. Lima*.

Nazarov, M., (1997). *Algebras de Lie*.

Roman, S., (2000). *Advanced Lienear Algebra.* Carolina. USA: Springer.

Sternberg, S., (2004). *Lie Algebras*. USA.

Samelson, H. (2012). *Notes on Lie algebras*. Springer Science & Business Media.

ANEXOS

Anexo 1

Lema de Zorn

Sea $(a, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío tal que todo subconjunto bien ordenado de $\boldsymbol{a}$ tiene una cota superior. Entonces existe un elemento maximal de $\boldsymbol{a}$**.** O su equivalente todo anillo *R* con unidad contiene un ideal maximal.

Demostración:

Como $a \neq \emptyset$**,** se crea una función selectora definida de la siguiente manera:

$$h: P(a) \setminus \emptyset \to a$$

Tal que $h(x) \in x$, para todo $x \in a$, $x \neq \emptyset$, luego se construye el conjunto c de los subconjuntos de a que tiene cotas superiores estrictas:

$$c = \{x \in P(a): \exists s\ \forall t\ (t \in s \longrightarrow t < s)\}$$

Para todo $x \in c$, sea m_x el conjunto de todas las cotas superiores estrictas de x. Se Define $f: c \longrightarrow a$ como $f(x) = h(m_x)$, para todo $x \in c$. Se tiene que $f(x)$ es una cota superior de x.

Sea $b \notin a$ y considérese la función $S: \mathcal{U} \longrightarrow a \cup \{b\}$ definida del modo siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} f\big(Img(x)\big), si\ Img(x) \in c \\ \quad b\ , si\ Img(x) \notin c \end{cases}$$

Así por recurrencia se define la función $F: Ord \to a \cup \{b\}$, satisfaciendo

$$F(\alpha) = \begin{cases} f\big(Img(F \setminus_\alpha)\big)\ si\ Img(x) \in c \\ \quad b\ en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Veamos, si $\beta \in \alpha$ y $F(\alpha) \in a$, entonces $F(\beta) < F(\alpha)$. En efecto, $F(\alpha)$ es una cota superior estricta de $Img(F \setminus_\alpha)$, esto implica que existe un ordinal α tal que $F(\alpha) = b$. Sea γ el primer elemnto del conjunto $\{\beta \in \alpha' : F(\beta) = b\}$. Así se deduce que si $\varepsilon \in \beta) \in a$, entonces $F(\varepsilon) < F(\beta)$, y como γ es totalmente ordenado $F \setminus_\gamma : \gamma \longrightarrow a$es un homomorfismo. Luego $Img(F \setminus_\gamma)$ con el orden heredado de a es isomorfo a γ y por lo tanto es un subconjunto bien ordenado de a. Entonces $Img(F \setminus_\alpha)$ tiene cota superior. Si alguna cota superior fuese estricta, $Img(F \setminus_\gamma) \in c$ lo que implica que $F(\gamma) \neq b$. Por lo tanto toda cota superior de $Img(F \setminus_\gamma)$ es un elemento maximal de $(a, \leq)$.

$\square$

Anexo 2

Matriz general de consistencia

Título: Teorema de Engel en las Álgebras de Lie **Piura-Perú 2018**
Nombre del Tesista: Br. Jonathan Josué Zapata Campos

Problemas	Objetivos	Hipótesis	Metodología
General ¿Existe una base en la cual todas las transformaciones están representadas por matrices triangulares estrictamente superior en el teorema de Engel?	**General** Analizar el teorema de Engel en las algebras de Lie. **Específicos** 1. Determinar la existencia de la base de una subálgebra de Lie compuesta por transformaciones lineales. 2. Determinar bajo qué condiciones todas las trasformaciones lineales del subálgebra de Lie se pueden representar por matrices triangulares estrictamente superior con dicha base encontrada.	**General** Existe en el teorema de Engel una base en la cual todas las transformaciones de un subálgebra de Lie están representadas por matrices triangulares estrictamente superior en el teorema de Engel. **Específica:** 1. Existe una base de un subálgebra de Lie compuesta por transformaciones lineales en el Teorema de Engel. 2. Todas las transformaciones lineales del subálgebra de Lie se pueden representar por matrices triangulares estrictamente superior con dicha base encontrada en el teorema de Engel. **Justificación** Este teorema tiene una gran importancia en el Álgebra de Lie, pues proporciona una condición, para que un Álgebra de Lie compuesta por operadores ad-nilpotente sea nilpotente **Importancia** El teorema de Engel, también beneficia con mucha importancia al teorema llamado el Teorema de Lie.	**Enfoque:** Cualitativo **Diseño:** No experimental **Nivel:** descriptivo **Tipo:** descriptivo **Métodos:** Investigación descriptiva **Técnicas e instrumentos:** Revisión Bibliográfica **Procedimiento:** Se basa dicha información en la recolección de libros escritos y tesis desarrolladas, y llegando al análisis de nuestra hipótesis planteada.